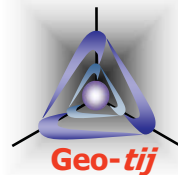


地盤の解析における t_{ij} の考え方の必然性

tij地盤解析研究会・(株)地域地盤環境研究所・中部大学
中井 照夫



1

Subloading t_{ij} modelが表現できること

- | | | |
|---------------------------------------|---|--------------------------|
| (1)変形・強度特性におよぼす間隙比や拘束応力の影響 「過圧密土」 | } | 下負荷面の考え方とその拡張(ボンディングを考慮) |
| (2)自然堆積粘土等に見られる構造の発達した土の挙動 「自然堆積土」 | | |
| (3)中間主応力が変形・強度特性におよぼす影響 | } | t_{ij} の概念 |
| (4)引張り応力の発生しない構成モデル | | |
| (5)ひずみ増分方向におよぼす応力増分方向の影響 | } | 塑性ひずみ増分の分割 |
| (6)時間効果特性すなわちレオロジー特性 | | |

2

はじめに

地盤の弾塑性解析で使われる構成モデルは、そのほとんどが 弾・完全塑性モデルとしてはMohr-Coulomb modelやDrucker-Prager model、ひずみ硬化型モデルとしてはCam-clay modelあるいはその派生モデルである。ここに、Mohr-Coulomb modelは (σ_1, σ_3) を応力パラメータとして、その他の多くは (p, q) を応力パラメータとするモデルである。しかし、何れのモデルもその適応性は三軸圧縮条件 $(\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3)$ でしか検証されていない。

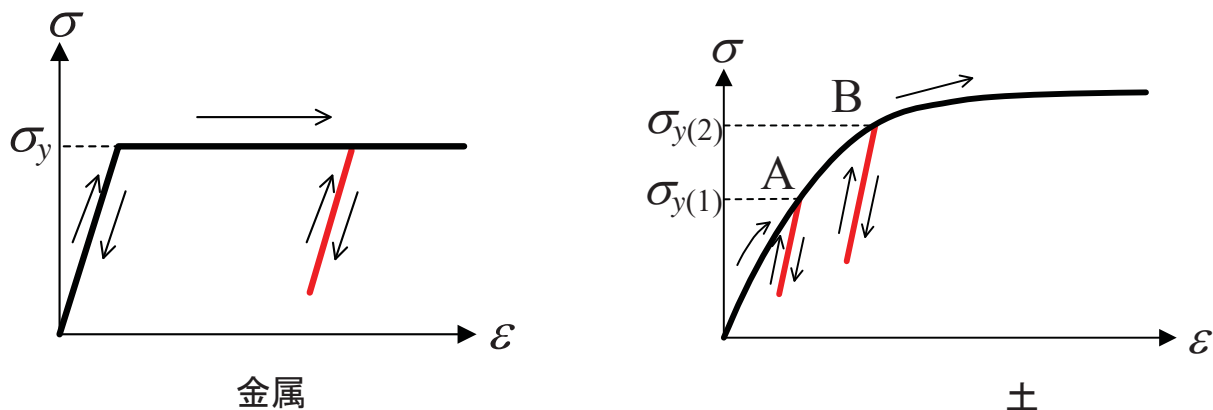
しかし、そのような地盤の応力条件は希有にも拘わらず、相異なる3主応力条件下 $(\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3)$ での有効性はほとんど検討されない。以前は、3主応力載荷試験も行われていたが、最近日本ではほとんどお目にかからない。モデルの基本的な挙動を一般的な3次元応力条件下の要素特性で検証した上で、実際問題の解析にモデルは適用出来るものである。

ここでは、一般的な3次元応力状態の土の挙動を包括的かつ合理的に説明出来る「 t_{ij} の概念」に絞って、その物理的意味を含めて解説する。なお、この概念はこれまで私たちが提案しているモデル(例えば、Subloading t_{ij} model)だけに適用できるものではなく、Cam clayを含む既往の如何なる (p, q) モデルにも簡単に適用出来る。

また、 t_{ij} の考え方に至ったプロセスについても紹介する。アイデアにはそれが生まれる環境と動機がある。

3

金属と土の弾塑性挙動の違い



両者は同じ弾塑性挙動であってもその基本的性質は同じではない。

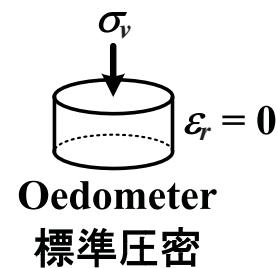
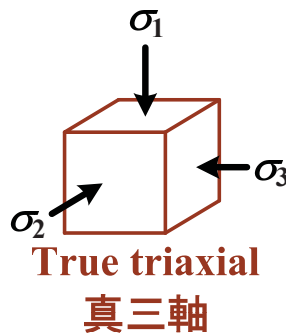
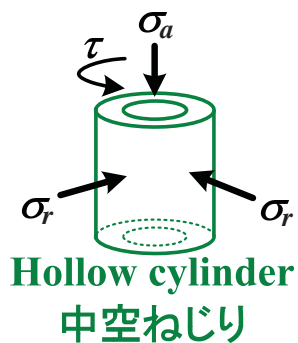
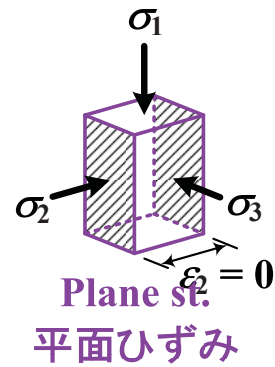
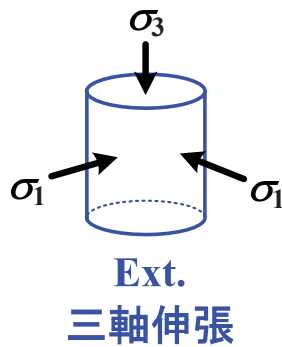
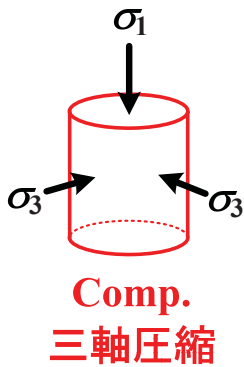
- ひずみ硬化特性は別にして、金属では弾性限界 (σ_y) までは純粋に弾性。これは弾性挙動を示す限り、構造変化(応力誘導異方性)の発達は無い事を意味する。
- 一方、土では載荷の最初から弾塑性挙動を示す。すなわち、載荷の過程では常に構造変化(応力誘導異方性)を伴っている。



土の弾塑性のモデル化でどのように表現するか...

4

要素試験の応力状態

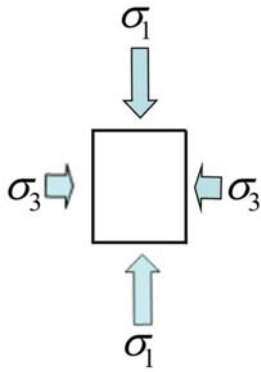


5

既往の応力パラメータによるモデル化
と
 t_{ij} の概念に基づく応力パラメータによるモデル化

6

2次元状態での応力の不変量

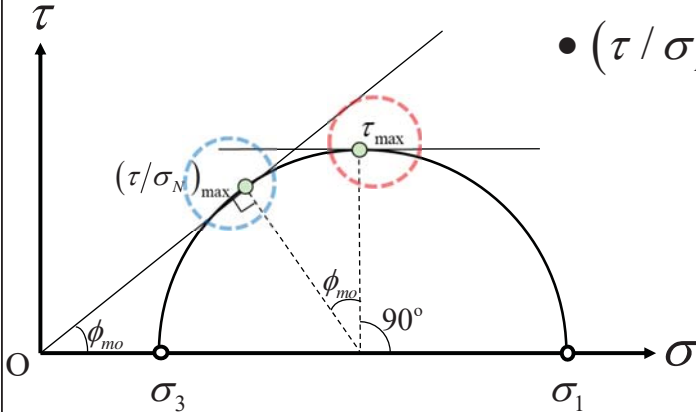


- τ_{\max} 面上での応力および応力比:

$$\sigma_{45^\circ} = s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$$\tau_{45^\circ} = t = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\frac{\tau_{45^\circ}}{\sigma_{45^\circ}} = \frac{t}{s} = \sin \phi_{mo} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}$$



- $(\tau / \sigma_N)_{\max}$ 面上での応力および応力比:

$$\sigma_N = \frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}$$

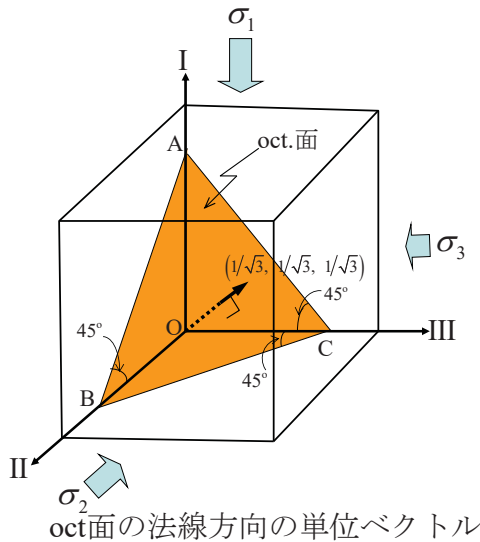
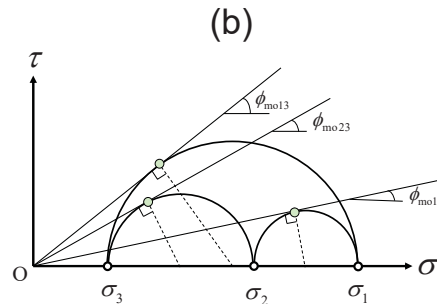
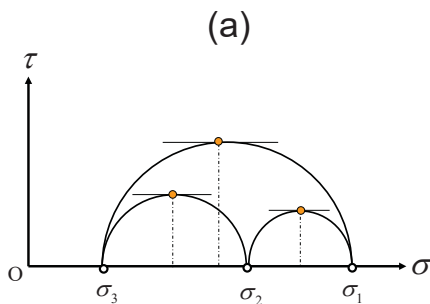
$$\tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{\sigma_1\sigma_3}}{\sigma_1 + \sigma_3}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \tan \phi_{mo} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_3}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}} \right)$$

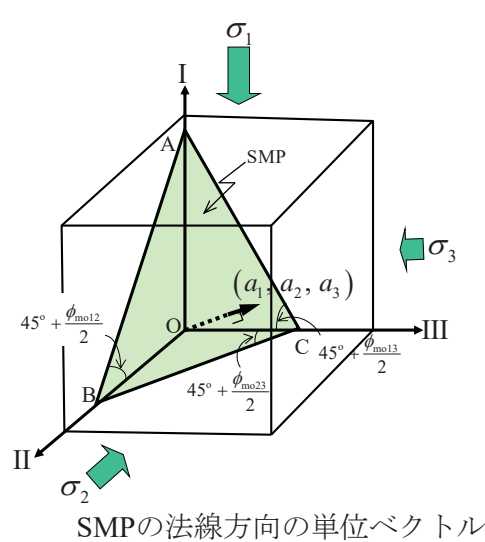
村山(1964)

7

3次元状態における正八面体面(oct面)と空間滑動面(SMP)



$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$



$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (a_1, a_2, a_3)$$

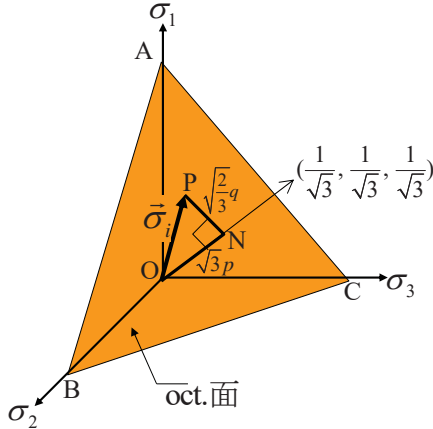
where,

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_1}} \\ a_2 = \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_2}} \\ a_3 = \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_3}} \end{cases}$$

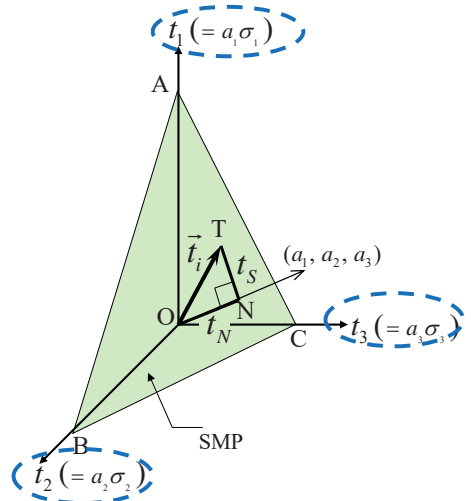
8

3次元状態における応力の不変量と構成モデル

(a) 既往の弾塑性モデル



(b) t_{ij} に基づく弾塑性モデル



• 応力の不変量

$$p = \sqrt{\frac{1}{3}} ON = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} NP = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$t_N = ON = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3$$

$$t_S = NT = \sqrt{(t_1 a_2 - t_2 a_1)^2 + (t_2 a_3 - t_3 a_2)^2 + (t_3 a_1 - t_1 a_3)^2}$$

• 降伏関数

$$f = F(p, \eta = q/p) - H = 0$$

$$f = F(t_N, X = t_S/t_N) - H = 0$$

• 流れ則

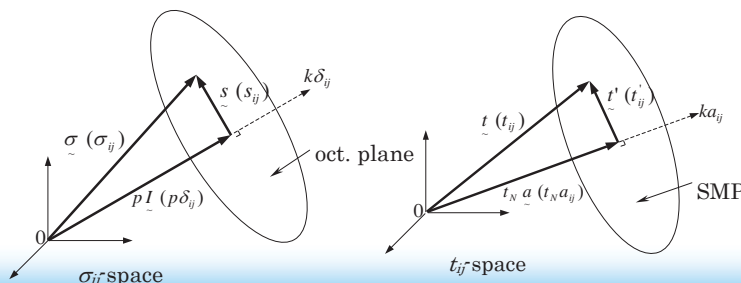
$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_{ij}}$$

(正の係数 Λ は $df=0$ から決まる)

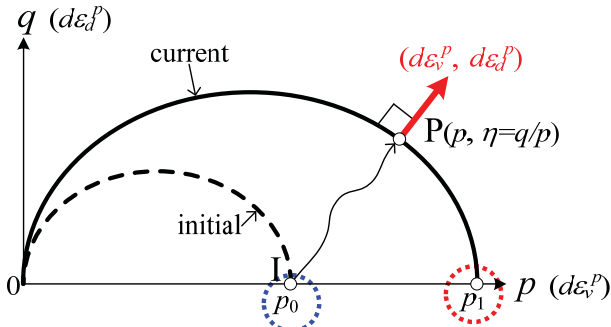
既往および t_{ij} モデルで使われる応力・ひずみ増分パラメーター

| | ordinary concept | t_{ij} concept |
|--|--|--|
| tensor normal to reference plane | δ_{ij} (unit tensor) | a_{ij} (tensor normal to SMP) |
| stress tensor | σ_{ij} | t_{ij} |
| mean stress | $p = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$ | $t_N = t_{ij} a_{ij}$ |
| deviatoric stress tensor | $s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$ | $t'_{ij} = t_{ij} - t_N a_{ij}$ |
| deviatoric stress | $q = \sqrt{(3/2) s_{ij} s_{ij}}$ | $t_S = \sqrt{t'_{ij} t'_{ij}}$ |
| stress ratio tensor | $\eta_{ij} = s_{ij} / p$ | $x_{ij} = t'_{ij} / t_N$ |
| stress ratio | $\eta = q / p$ | $X = t_S / t_N$ |
| strain increment normal to reference plane | $d\varepsilon_v = d\varepsilon_{ij} \delta_{ij}$ | $d\varepsilon_N^* = d\varepsilon_{ij} a_{ij}$ |
| deviatoric strain increment tensor | $de_{ij} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_v \delta_{ij} / 3$ | $de'_{ij} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_N^* a_{ij}$ |
| strain increment parallel to reference plane | $d\varepsilon_d = \sqrt{(2/3) de_{ij} de_{ij}}$ | $d\varepsilon_S^* = \sqrt{de'_{ij} de'_{ij}}$ |



降伏関数および流れ則の比較(Cam clayを例として)

(a) 既往の弾塑性モデル



(p, q) 面で表した初期(initial)および現在(current)の降伏関数と塑性ひずみ増分の方向

$$f = F(p, \eta = q/p) - H(\varepsilon_v^p) = 0$$

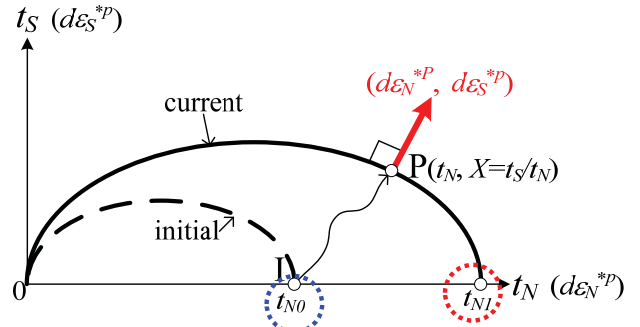
$$F = \ln \frac{p_1}{p_0} = \left\{ \ln \frac{p}{p_0} + \zeta(\eta) \right\}$$

($\zeta(\eta)$): $\zeta(0) = 0$ を満たす単調増加関数)

$$H = \frac{\varepsilon_v^p}{\lambda - \kappa}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \langle \Lambda \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left(\begin{array}{l} df = dF - dH = 0 \text{より} \\ \Lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{kl}^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}} \end{array} \right)$$

(b) t_{ij} に基づく弾塑性モデル



(t_N, t_S) 面で表した初期(initial)および現在(current)の降伏関数と塑性ひずみ増分の方向

$$f = F(t_N, X = t_S/t_N) - H(\varepsilon_v^p) = 0$$

$$F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \left\{ \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) \right\}$$

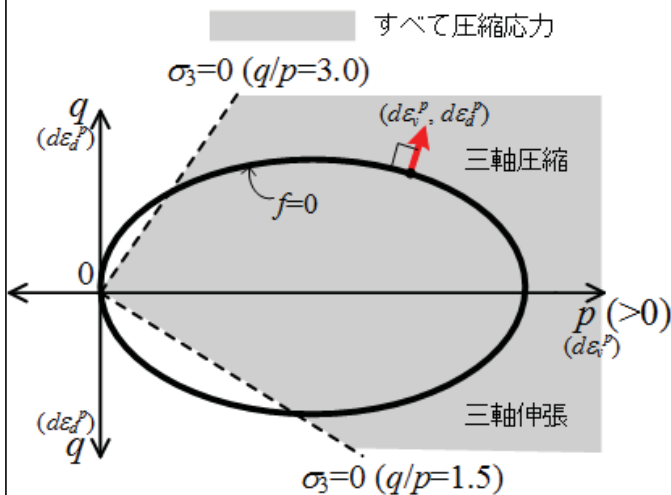
($\zeta(X)$): $\zeta(0) = 0$ を満たす単調増加関数)

$$H = \frac{\varepsilon_v^p}{\lambda - \kappa}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \langle \Lambda \rangle \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \left(\begin{array}{l} df = dF - dH = 0 \text{より} \\ \Lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{kl}^p} \frac{\partial F}{\partial t_{kl}}} \end{array} \right) \quad 11$$

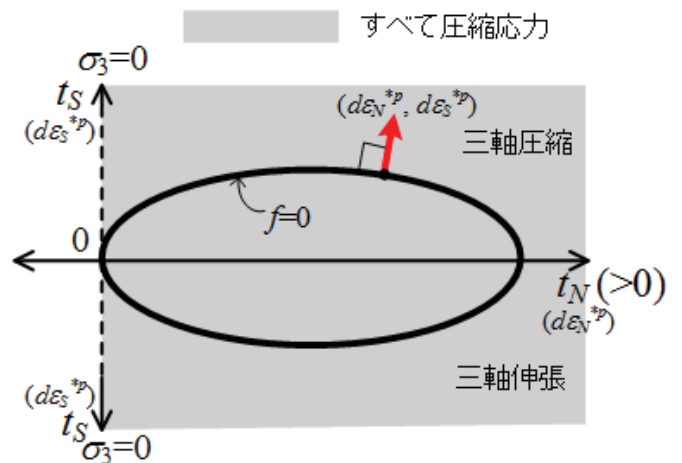
既往および t_{ij} の概念によるモデルの降伏曲面と応力の取り得る領域

(a)



(p, q)を応力パラメータとする弾塑性論の降伏曲面と流れ則

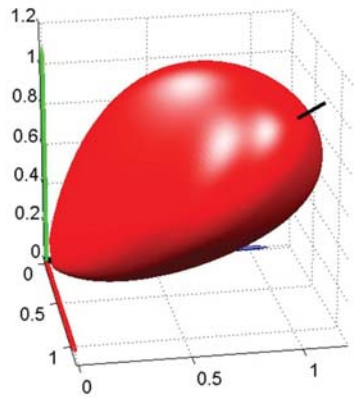
(b)



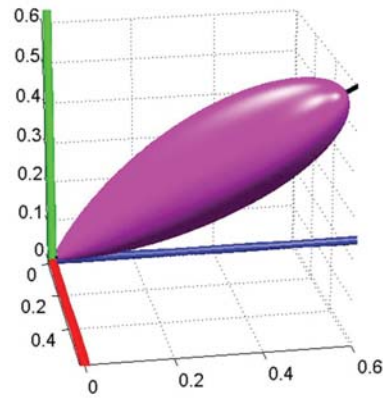
t_{ij} の概念に基づく(t_N, t_S)を応力パラメータとする弾塑性論の降伏曲面と流れ則

t_{ij} に基づくパラメータ(t_N, t_S)で作った降伏関数はその内部に引張り領域はない。一方、既往のパラメータ(q, p)で作った降伏曲面はその内部に引張り領域が存在する。

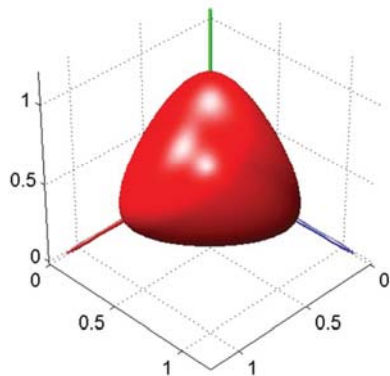
t_{ij} modelの降伏曲面(3次元表示)



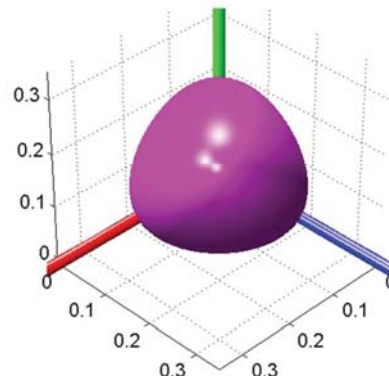
(a) Space $\sigma_1 \times \sigma_2 \times \sigma_3$



(b) Space $t_1 \times t_2 \times t_3$

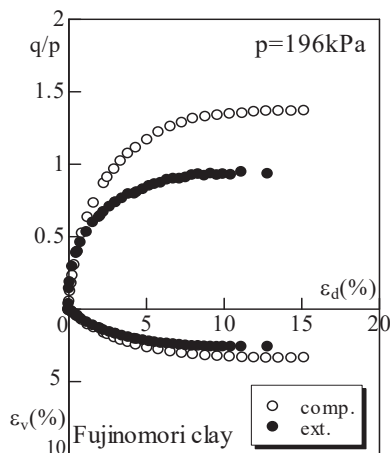
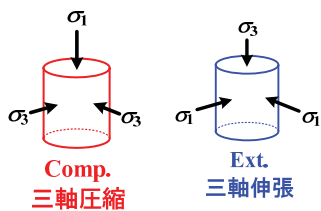


(c) View from hydrostatic axis $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

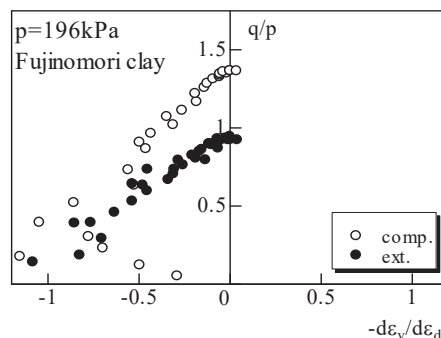
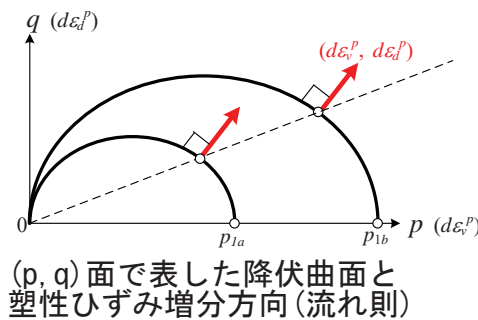


(d) View from hydrostatic axis $t_1 = t_2 = t_3$

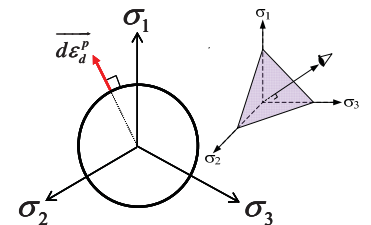
既往の応力およびひずみパラメータによる実測値の整理(粘土)



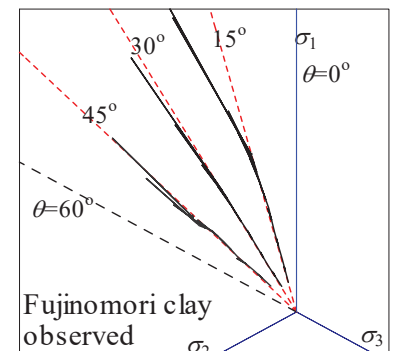
三軸圧縮 (Comp.) および伸張 (Ext.) 試験の応力-ひずみ関係



三軸圧縮 (Comp.) および伸張 (Ext.) 試験の応力比-ひずみ増分比関係

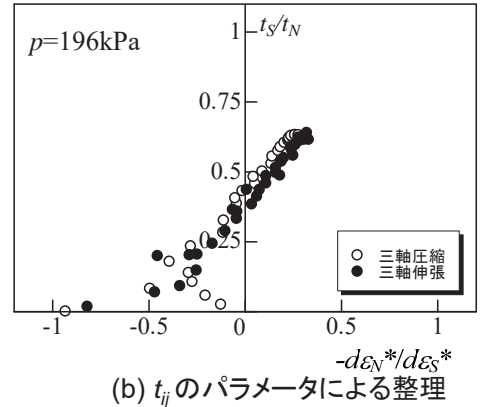
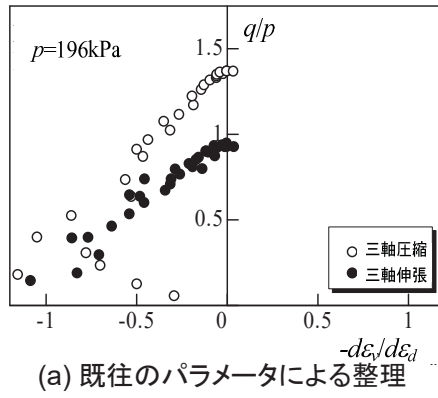
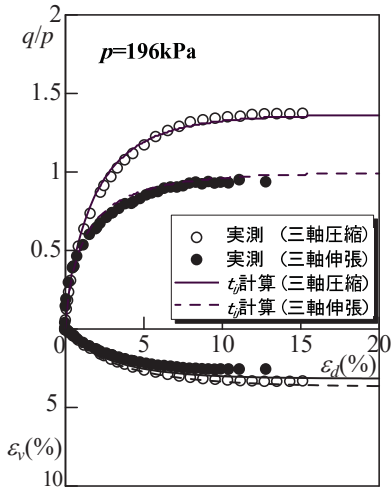


$\theta = 0^\circ$: Comp.
 $0^\circ < \theta < 60^\circ$: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$
 $\theta = 60^\circ$: Ext.



3主応力制御試験のoct 面上のせん断ひずみ増分方向

t_{ij} の概念に基づいたモデルによる解析(粘土)

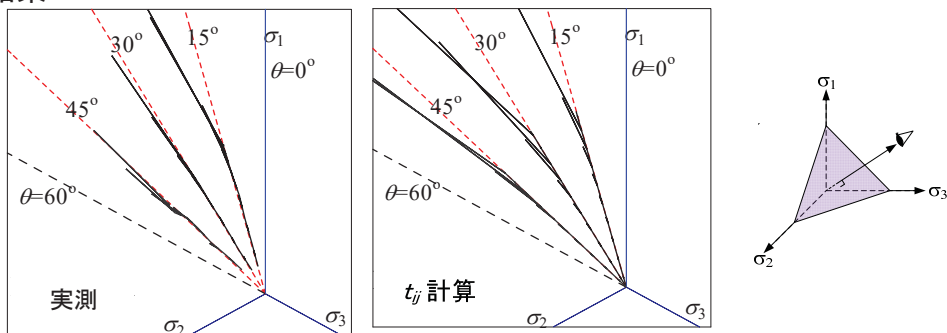


(a) 既往のパラメータによる整理

(b) t_{ij} のパラメータによる整理

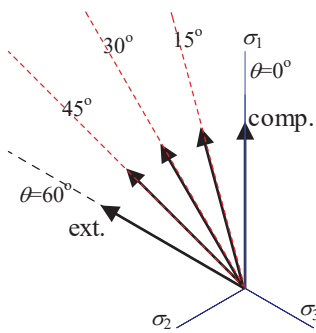
正規圧密粘土の応力・ひずみ関係の実測値と解析結果

正規圧密粘土の応力比～ひずみ増分比関係

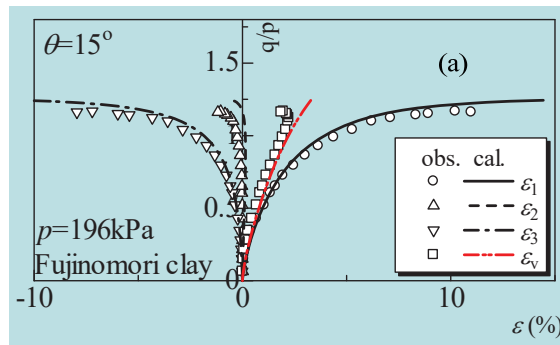


三主応力制御試験の正八面体面上のひずみ増分方向の実測値と解析結果

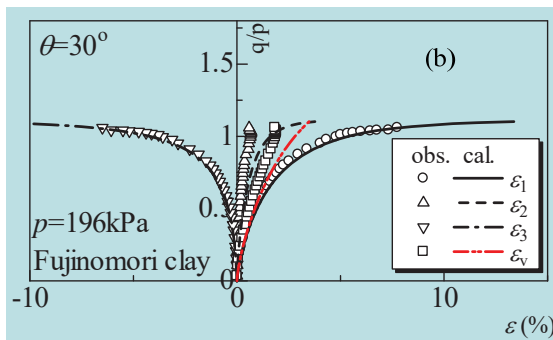
正規圧密粘土の3主応力制御試験



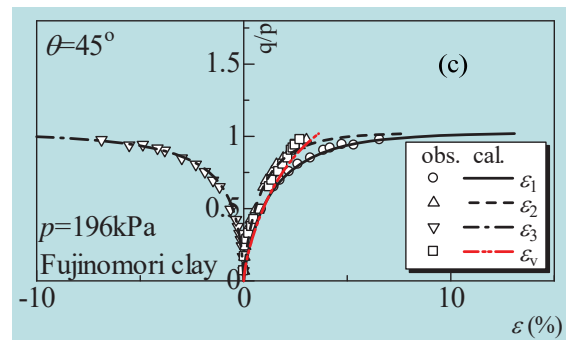
正八面体面状の応力経路



$\theta=15^\circ$



$\theta=30^\circ$



$\theta=45^\circ$

t_{ij} の概念の意味

微視的観点から見た t_{ij} の意味

- Satake(1984)による構造テンソルの主値と応力比の関係

$$\varphi_1/\varphi_2 \approx (\sigma_1/\sigma_2)^{0.5}$$

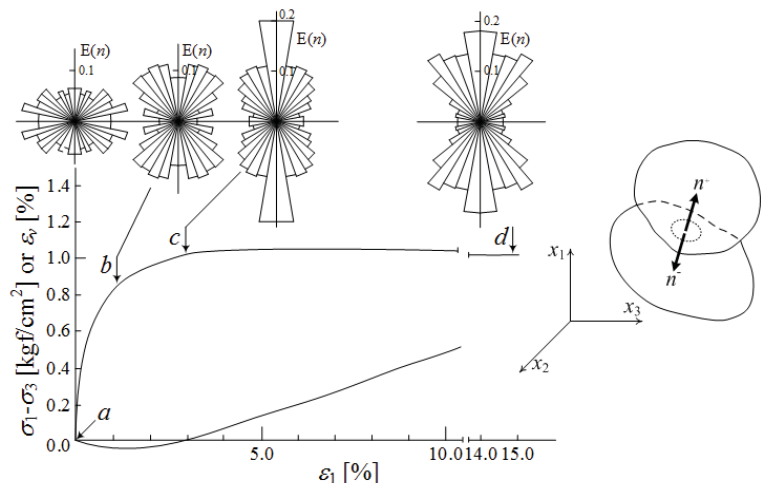
- Satake(1982)による修正応力

$$\sigma_{ij}^* = (1/3)\varphi_{ik}^{-1}\sigma_{kj}$$

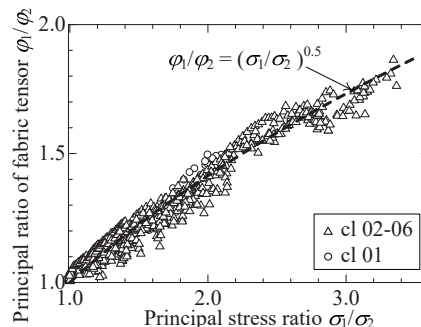
- 修正応力 t_{ij} (Nakai & Mihara, 1984)

$$t_{ij} = a_{ik}\sigma_{kj}$$

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_1}}, \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_2}}, \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_3}} \right)$$

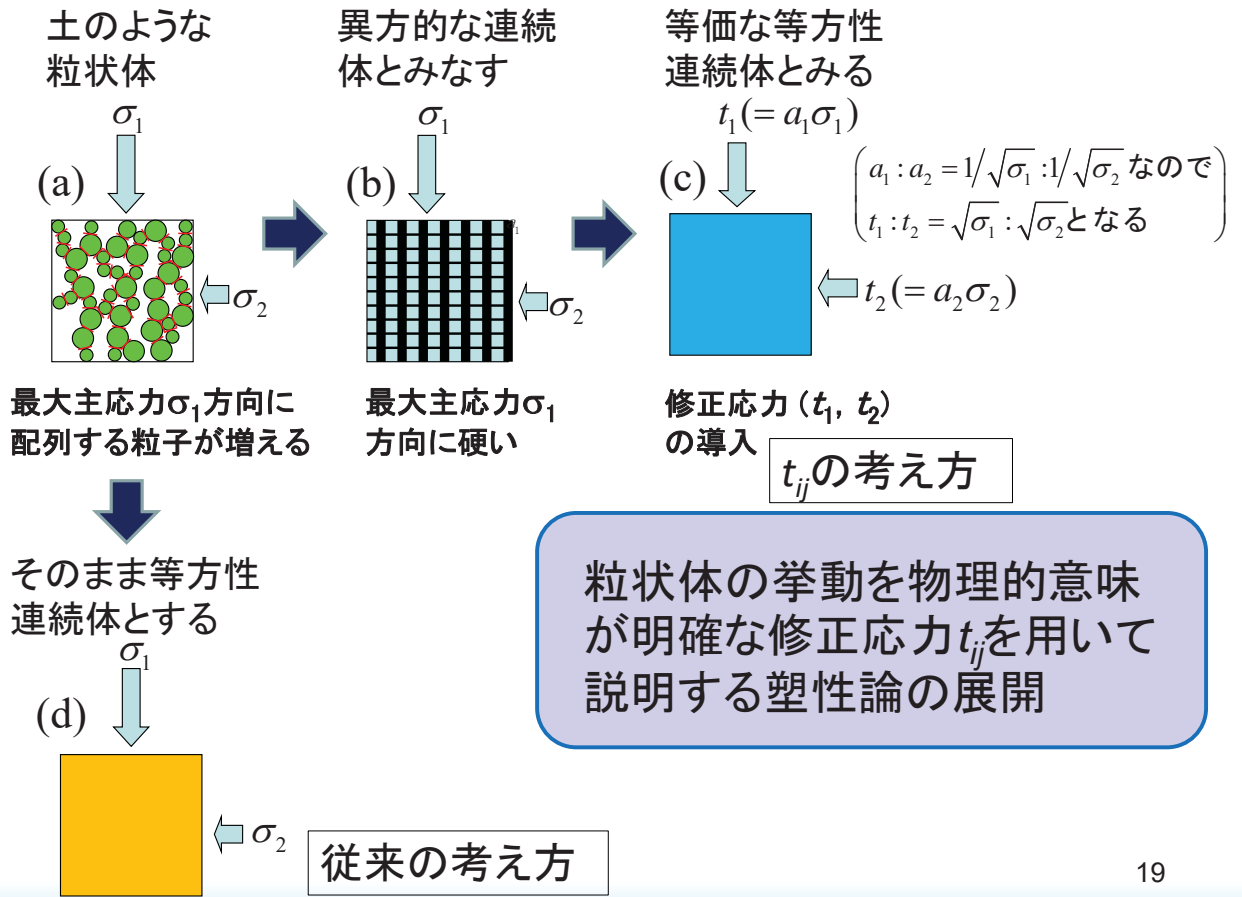


応力・ひずみ関係と粒子接平面の法線頻度分布 (Oda, 1972; 1993)

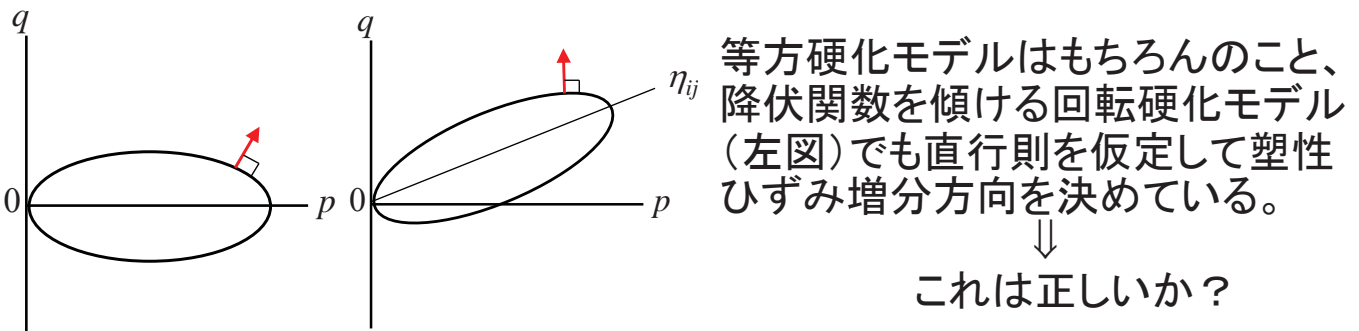


DEMによる構造テンソルの主値の変化 (Maeda et al., 2006)

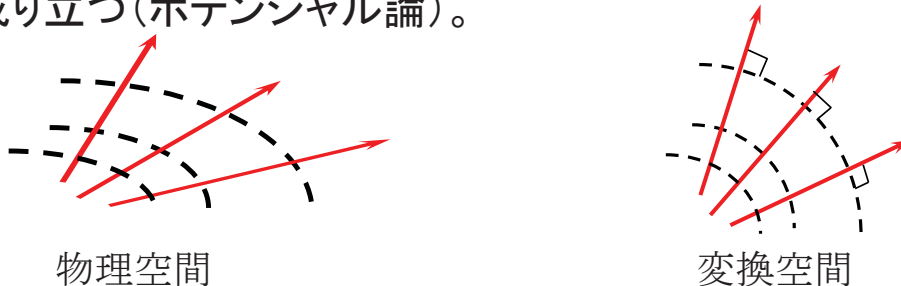
t_{ij} の概念に基づく塑性論と通常の塑性論



t_{ij} の概念における流れ則(直交則)の意味



例えば、異方性地盤の透水問題では流れの方向は物理空間の等ポテンシャル面に直交せず、等方的な透水係数になるように変換した空間で直行則が成り立つ(ポテンシャル論)。

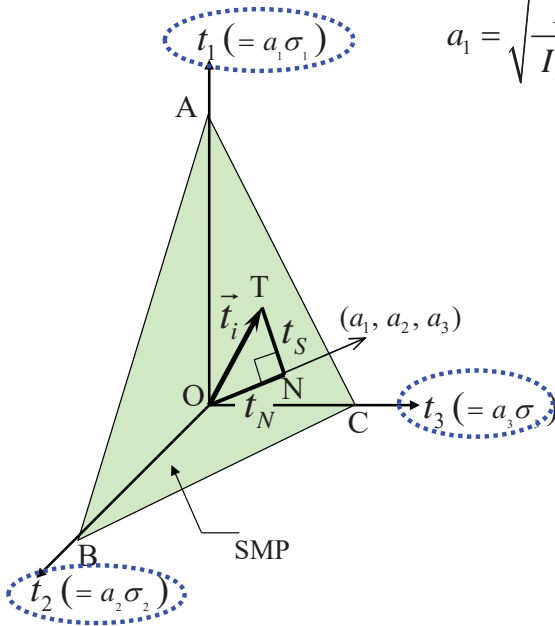


t_{ij} の考え方は応力(応力比)誘導異方性を有する材料を、等価な等方性を有する材料に置き換えることを意味する。そのような意味において、 σ_{ij} 空間ではなく t_{ij} 空間で直行則を考えるのが妥当だと言える。

t_{ij} の応力パラメータ(t_S, t_N)の意味

SMPの方向余弦：

$$a_1 = \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_2}}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_3}}$$



応力パラメータ：

$$\begin{cases} t_N = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 \\ t_S = \sqrt{(t_1 a_2 - t_2 a_1)^2 + (t_2 a_3 - t_3 a_2)^2 + (t_3 a_1 - t_1 a_3)^2} \end{cases}$$

- ($t_1 = a_1 \sigma_1, t_2 = a_2 \sigma_2, t_3 = a_3 \sigma_3$)は応力誘導異方性を示す粒状性材料を等方的な連続体として扱うための修正応力である。
- 修正応力空間でSMPに垂直な成分 t_N と平行な成分 t_S を応力パラメータとし、応力比 $X = t_S / t_N$ でせん断挙動が説明できることは、粒状性材料は摩擦則(SMP)でその挙動が支配されることを意味する。

21

降伏関数の微分計算(1/2)

降伏関数：

$$f = F(t_N, X) - H \quad (\text{where, } H: \text{硬化パラメータの関数})$$

- 降伏関数の応力項

$$F(t_N, X) = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) \quad (\text{a})$$

(where $X = t_S / t_N, \zeta(X): \zeta(0) = 0$ となる単調増加関数)

- 降伏関数 F の t_{ij} による微分

$$\frac{\partial F}{\partial t_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial t_N} \frac{\partial t_N}{\partial t_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t_{ij}} \quad (\text{b})$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_N} = \frac{1}{t_N} \quad (\text{c})$$

$$\frac{\partial t_N}{\partial t_{ij}} = \frac{\partial (t_{kl} a_{kl})}{\partial t_{ij}} = a_{ij} \quad (\text{d})$$

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \zeta'(X) \quad (\text{e})$$

where

$$x_{ij} = \frac{t_{ij}}{t_N} = \frac{t_{ij} - t_N a_{ij}}{t_N} = \frac{t_{ij}}{t_N} - a_{ij} \quad (\text{g})$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_{kl}} = \frac{\partial (\sqrt{x_{mn} x_{mn}})}{\partial x_{kl}} = \frac{x_{kl}}{X} \quad (\text{h})$$

$$\frac{\partial x_{kl}}{\partial t_{ij}} = \frac{\partial}{\partial t_{ij}} \left(\frac{t_{kl}}{t_N} - a_{kl} \right) = \frac{1}{t_N} \{ \delta_{ik} \delta_{jl} - (x_{kl} + a_{kl}) a_{ij} \} \quad (\text{i})$$

$$\frac{\partial X}{\partial t_{ij}} = \frac{\partial (\sqrt{x_{mn} x_{mn}})}{\partial x_{kl}} \frac{\partial x_{kl}}{\partial t_{ij}} = \frac{1}{X \cdot t_N} (x_{ij} - X^2 a_{ij}) \quad (\text{f})$$

22

降伏関数の微分計算(2/2)

- 降伏関数 F の σ_{ij} による微分

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial t_N} \frac{\partial t_N}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{j}) \quad \left(F \text{ の増分は } dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \text{ で表せる} \right)$$

$$\frac{\partial t_N}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(3 \frac{I_3}{I_2} \right) = -3 \frac{I_3}{I_2^2} \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{ij}} + 3 \frac{1}{I_2} \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{k})$$

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\sqrt{\frac{I_1 I_2}{9 I_3} - 1} \right) = \frac{1}{2X} \left(\frac{I_2}{9 I_3} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{I_1}{9 I_3} \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{I_1 I_2}{9 I_3^2} \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (\text{l})$$

where

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} \quad (\text{m})$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{(\sigma_{kk})^2 - \sigma_{lm} \sigma_{ml}}{2} \right) = \sigma_{kk} \delta_{ij} - \sigma_{ij} \quad (\text{n})$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{e_{klm} e_{opq} \sigma_{ko} \sigma_{lp} \sigma_{mq}}{6} \right) = \frac{1}{2} e_{ilm} e_{j pq} \sigma_{lp} \sigma_{mq} \quad (\text{o})$$

23

t_{ij} の概念に至るプロセス

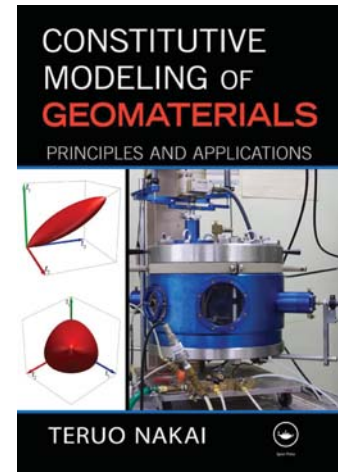
24

Preface of my book

When I was a student (almost 40 years ago), my supervisor, Sakuro Murayama, often told us that the most important challenge in the field of soil mechanics was to establish the stress–strain–time–temperature relation of soils. Since the beginning of his academic career, he had pursued research on a constitutive model for soils, and he summarized his experience in a thick book of almost 800 pages (Murayama 1990) when he was almost 80 years old. In his book, the elastoplasticity theory was not used in a straightforward manner, but he discussed soil behavior, focusing his attention not on the plane where shear stress is maximized, called the τ_{\max} plane or 45° plane, but rather on the plane where the shear–normal stress ratio is maximized, called the $(\tau/\sigma)_{\max}$ plane or mobilized plane, because the soil behavior is essentially governed by a frictional law.

In retrospect, I realize how sharp was his vision to pay attention to the mobilized plane at a time when most people looked at the τ_{\max} plane. Now, in three-dimensional (3D) conditions in which the intermediate principal stress must be considered, the plane corresponding to the τ_{\max} plane in two-dimensional (2D) conditions is the commonly used octahedral plane because the shear stress on the octahedral plane is the quadratic mean of maximum shear stresses between two respective principal stresses. For 3D constitutive modeling in this book, attention is paid to the so-called spatially mobilized plane (SMP) on which the shear–normal stress ratio is the quadratic mean of maximum shear–normal stress ratios between two respective principal stresses.

⋮

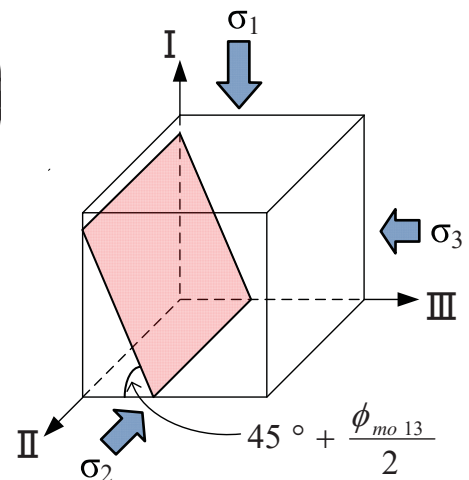
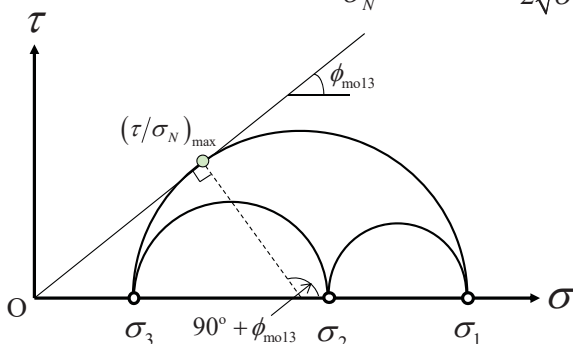


Published from CRC Press in 2012

滑動面から t_{ij} へ—滑動面

村山(1964)

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \tan \phi_{mo} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_3}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}} \right)$$



$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_N &= \sigma_1 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{mo13}}{2} \right) + \sigma_3 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{mo13}}{2} \right) = \frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \\ \tau &= (\sigma_1 - \sigma_3) \cos \left(45^\circ + \frac{\phi_{mo13}}{2} \right) \sin \left(45^\circ + \frac{\phi_{mo13}}{2} \right) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{\sigma_1\sigma_3}}{\sigma_1 + \sigma_3} \end{aligned} \right.$$



$$\left\{ \begin{aligned} d\varepsilon_N &= d\varepsilon_1 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{mo13}}{2} \right) + d\varepsilon_3 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{mo13}}{2} \right) \\ \frac{d\gamma}{2} &= (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) \cos \left(45^\circ + \frac{\phi_{mo13}}{2} \right) \sin \left(45^\circ + \frac{\phi_{mo13}}{2} \right) \end{aligned} \right.$$

□ τ/σ_N □ $d\varepsilon_N/d\gamma$ (stress–dilatancy式)

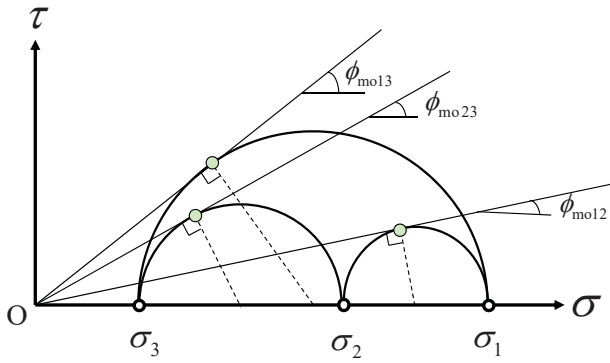
□ τ/σ_N □ γ 関係

(応力とひずみ増分の共軸性)

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= f(\sigma_1/\sigma_3) \\ \varepsilon_3 &= g(\sigma_1/\sigma_3) \end{aligned} \right.$$

滑動面から t_{ij} へ-複合滑動面

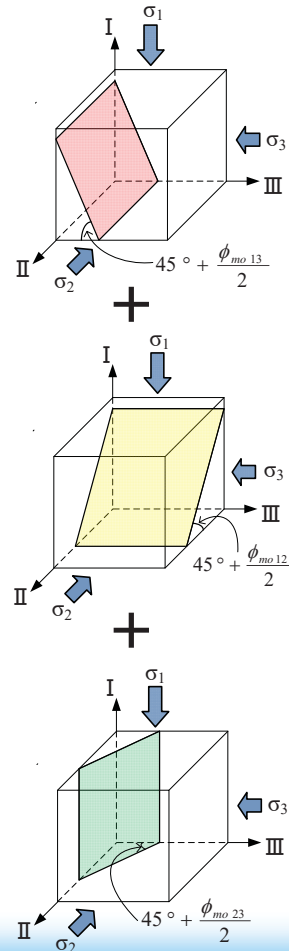
松岡(1974)



$$\begin{cases} \varepsilon_1 = f(\sigma_1/\sigma_3) + f(\sigma_1/\sigma_2) \\ \varepsilon_2 = f(\sigma_2/\sigma_3) + g(\sigma_1/\sigma_2) \\ \varepsilon_3 = g(\sigma_1/\sigma_3) + g(\sigma_2/\sigma_3) \end{cases}$$

e.g.,
 comp: $\varepsilon_1 = 2f(\sigma_1/\sigma_3)$, $\varepsilon_3 = g(\sigma_1/\sigma_3)$
 ext.: $\varepsilon_1 = f(\sigma_1/\sigma_3)$, $\varepsilon_3 = 2g(\sigma_1/\sigma_3)$
 plane st.: $\varepsilon_1 \square f(\sigma_1/\sigma_3)$, $\varepsilon_3 \square g(\sigma_1/\sigma_3)$

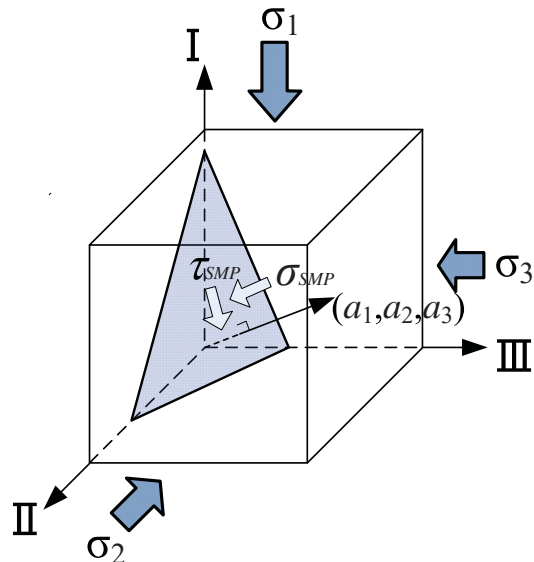
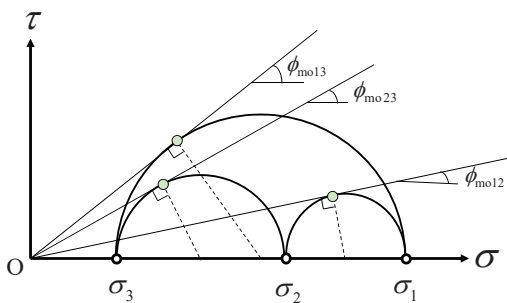
$$\begin{cases} d\varepsilon_1 = d\varepsilon_{\text{major}(13)} + d\varepsilon_{\text{major}(12)} \\ d\varepsilon_2 = d\varepsilon_{\text{major}(23)} + d\varepsilon_{\text{minor}(12)} \\ d\varepsilon_3 = d\varepsilon_{\text{minor}(13)} + d\varepsilon_{\text{minor}(23)} \end{cases}$$



27

滑動面から t_{ij} へ-空間滑動面(SMP)

松岡・中井(1974)



$$\begin{cases} \sigma_{SMP} = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 \\ \tau_{SMP} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 a_1^2 a_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_2^2 a_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 a_3^2 a_1^2} \end{cases}$$

ここに、 (a_1, a_2, a_3) はSMPの方向余弦

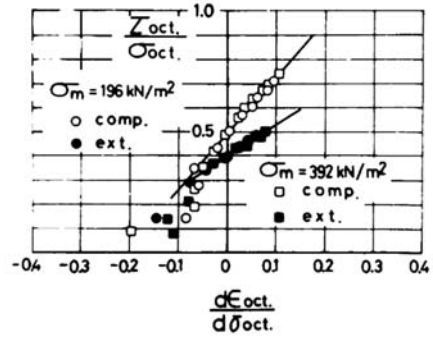
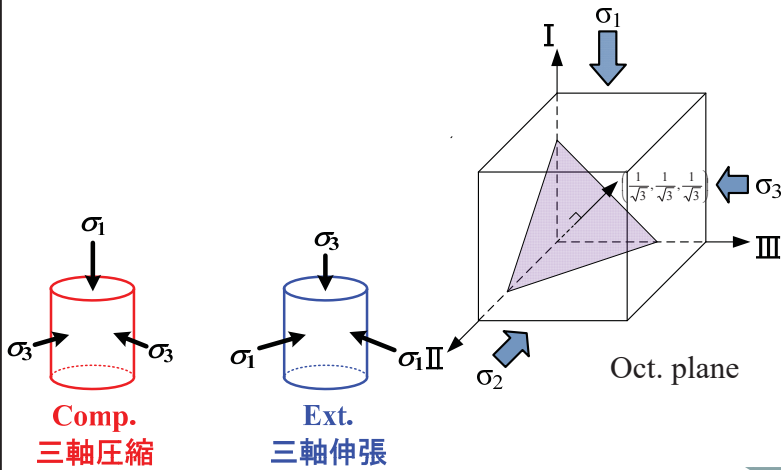
$$a_1 = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_2}}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_3}}$$

(I_2, I_3 : 応力の2次、3次の不変量)

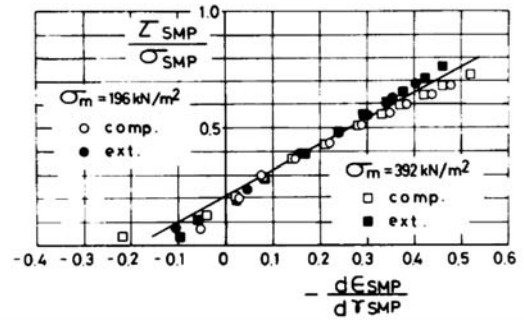
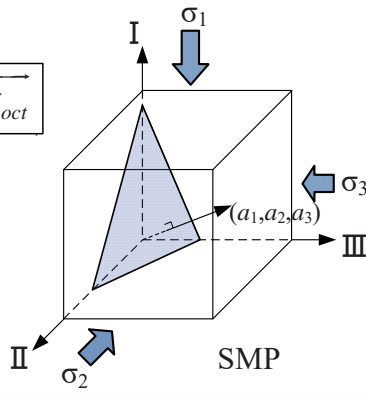
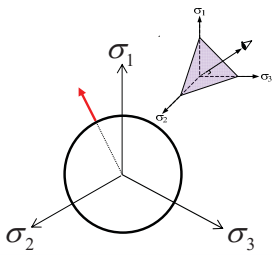
$$\begin{cases} d\varepsilon_{SMP} = d\varepsilon_1 a_1^2 + d\varepsilon_2 a_2^2 + d\varepsilon_3 a_3^2 \\ \frac{d\gamma_{SMP}}{2} = \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 a_1^2 a_2^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 a_2^2 a_3^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2 a_3^2 a_1^2} \end{cases}$$

28

滑動面から t_{ij} へ-空間滑動面(SMP)



$$\vec{\tau}_{SMP} \parallel d\gamma_{SMP} = \vec{\tau}_{oct} \parallel d\gamma_{oct}$$



相異なる3主応力下の土の破壊規準

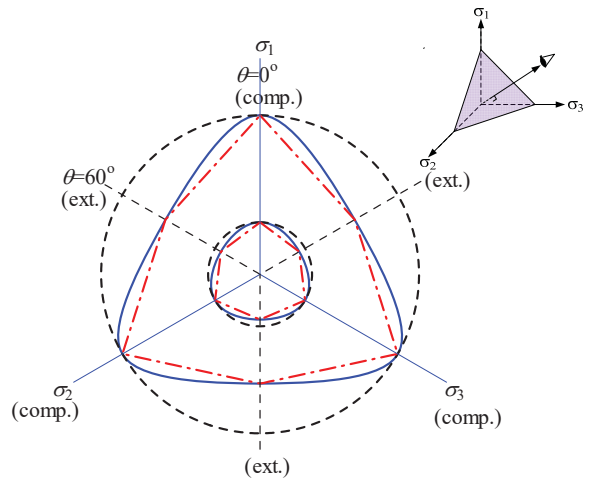
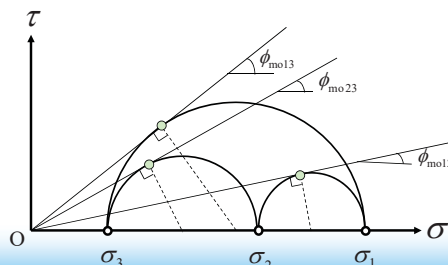
松岡・中井(1974)

$$\begin{aligned} t_N &= t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 \\ &= \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 = 3 \frac{I_3}{I_2} = \sigma_{SMP} \\ t_S &= \sqrt{(t_1 a_2 - t_2 a_1)^2 + (t_2 a_3 - t_3 a_2)^2 + (t_3 a_1 - t_1 a_3)^2} \\ &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 a_1^2 a_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_2^2 a_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 a_3^2 a_1^2} \\ &= \frac{\sqrt{I_1 I_2 I_3 - 9 I_3^2}}{I_2} = \tau_{SMP} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{t_S}{t_N} = \frac{\tau_{SMP}}{\sigma_{SMP}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4\sigma_2\sigma_3} + \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)^2}{4\sigma_3\sigma_1}} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\tan^2 \phi_{mo12} + \tan^2 \phi_{mo23} + \tan^2 \phi_{mo13}} \\ &= \sqrt{\frac{I_1 I_2}{9 I_3} - 1} = \text{const.} \end{aligned}$$

or

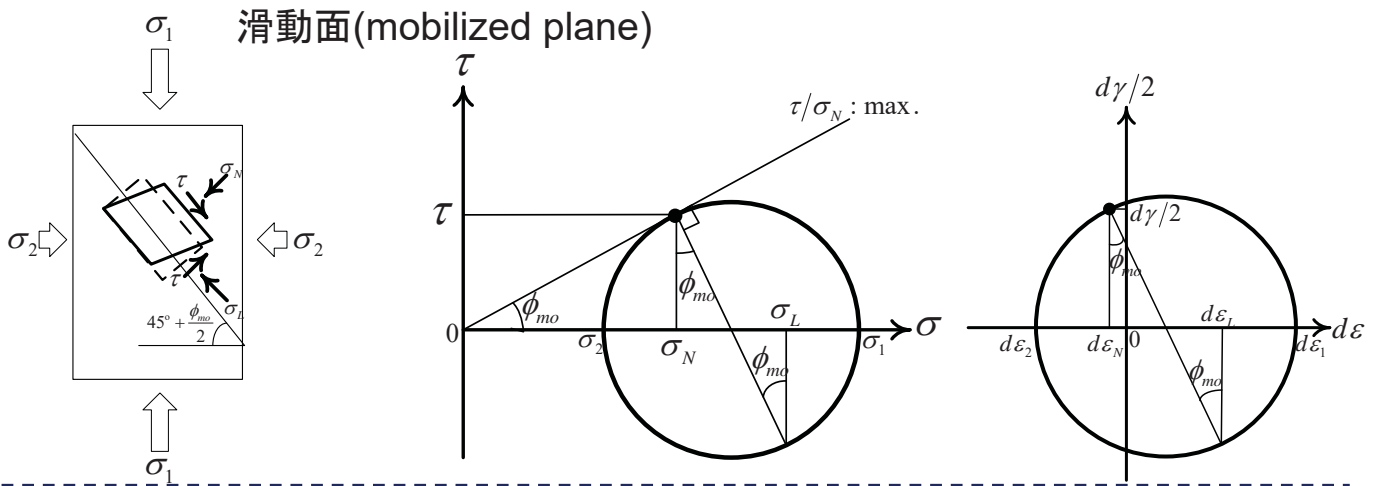
$$\frac{I_1 I_2}{I_3} = \text{const.}$$



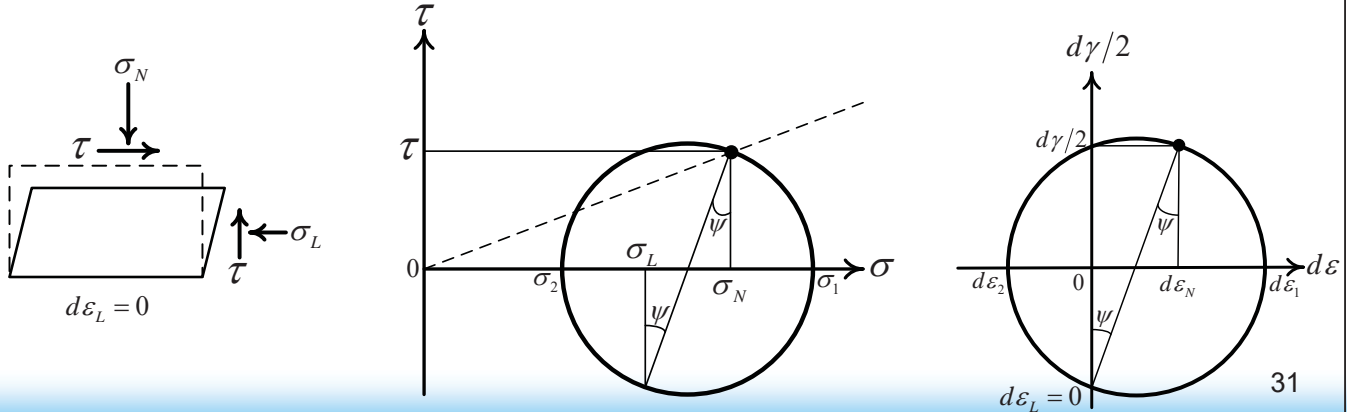
— SMP (X=0.2, 0.63)
 - - - (Extended) Mises (eta=0.45, 1.36)
 - - - Mohr-Coulomb (phi=12.0°, 33.8°)



滑動面での挙動と単純せん断挙動の違い

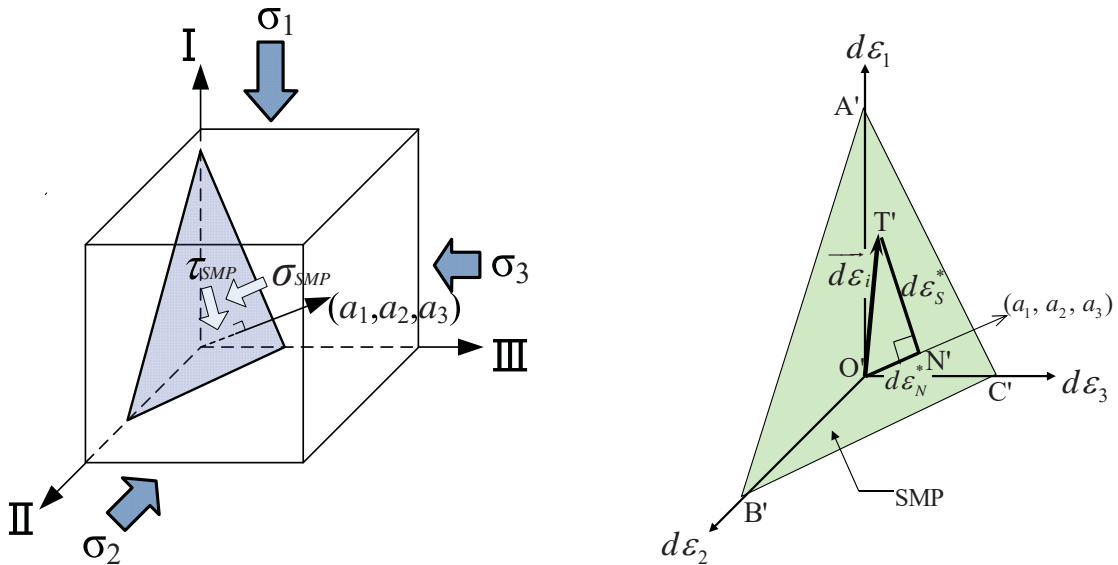


単純せん断(simple shear)



滑動面から t_{ij} へ - 拡張した空間滑動面(SMP*)

中井・松岡(1980, 1983)

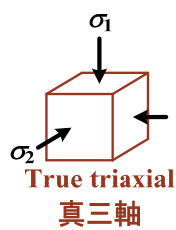
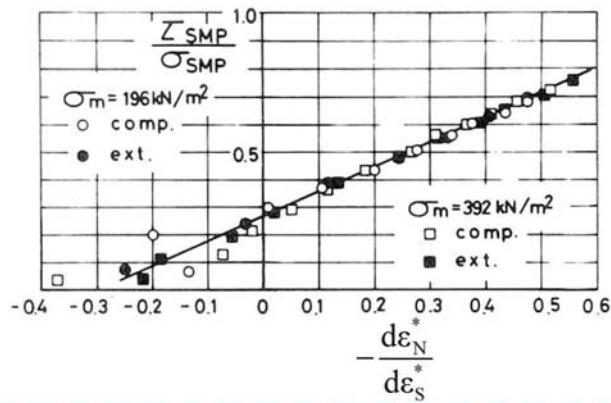
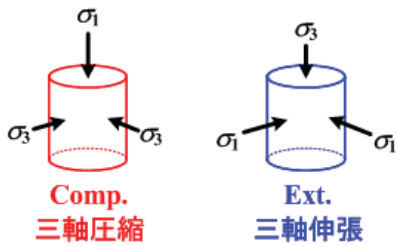


$$\begin{cases} \sigma_{SMP} = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 \\ \tau_{SMP} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 a_1^2 a_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_2^2 a_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 a_3^2 a_1^2} \end{cases}$$

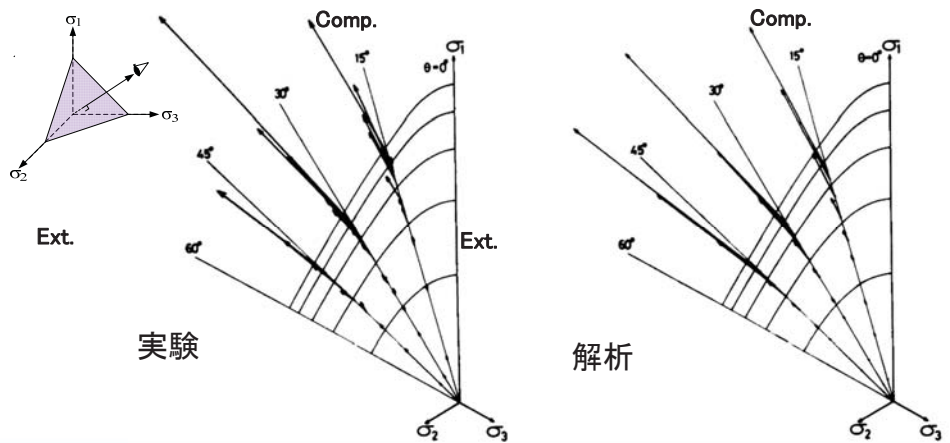


$$\begin{cases} d\epsilon_N^* = d\epsilon_1 a_1 + d\epsilon_2 a_2 + d\epsilon_3 a_3 \\ d\epsilon_S^* = \sqrt{(d\epsilon_1 a_2 - d\epsilon_2 a_1)^2 + (d\epsilon_2 a_3 - d\epsilon_3 a_2)^2 + (d\epsilon_3 a_1 - d\epsilon_1 a_3)^2} \end{cases}$$

滑動面から t_{ij} へ-拡張した空間滑動面(SMP*)



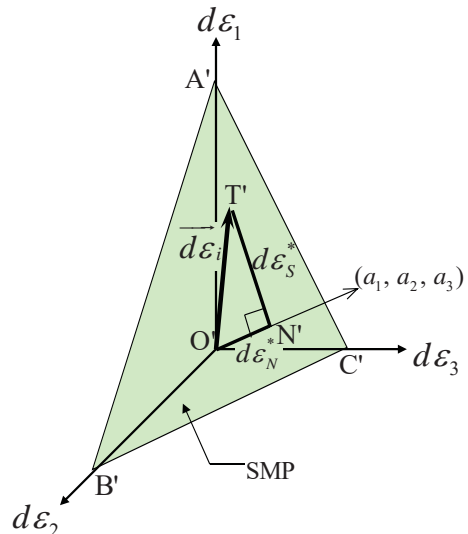
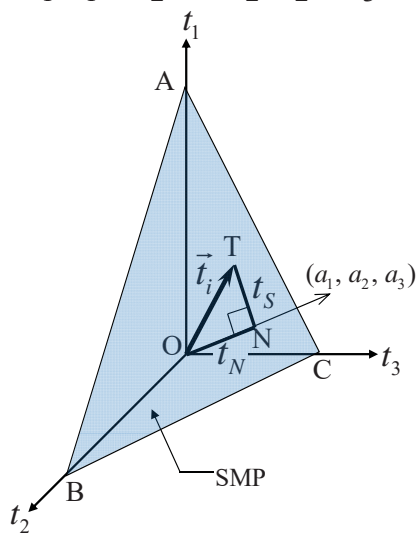
$$\vec{\tau}_{SMP} \parallel d\epsilon_S^*$$



滑動面から t_{ij} へ-修正応力 t_{ij} の概念

中井・三原(1984)

$t_1 = a_1\sigma_1, t_2 = a_2\sigma_2, t_3 = a_3\sigma_3$ とすると



$$\begin{cases} t_N = \sigma_{SMP} = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 \\ t_S = \tau_{SMP} = \sqrt{(t_1 a_2 - t_2 a_1)^2 + (t_2 a_3 - t_3 a_2)^2 + (t_3 a_1 - t_1 a_3)^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} d\epsilon_N^* = d\epsilon_1 a_1 + d\epsilon_2 a_2 + d\epsilon_3 a_3 \\ d\epsilon_S^* = \sqrt{(d\epsilon_1 a_2 - d\epsilon_2 a_1)^2 + (d\epsilon_2 a_3 - d\epsilon_3 a_2)^2 + (d\epsilon_3 a_1 - d\epsilon_1 a_3)^2} \end{cases}$$

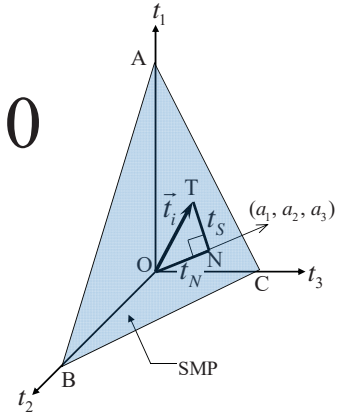
滑動面から t_{ij} へ-修正応力 t_{ij} の概念

弾塑性論への適用

$$f = F(t_N, X = t_S / t_N) - H = 0$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_{ij}}$$

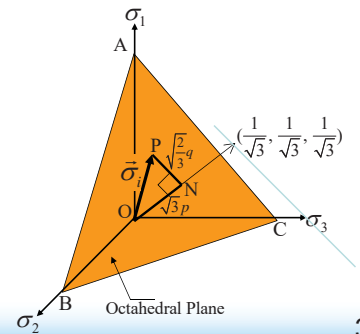
(正の係数 Λ は $df=0$ から決まる)



従来の弾塑性論 (e.g., Cam clay model)

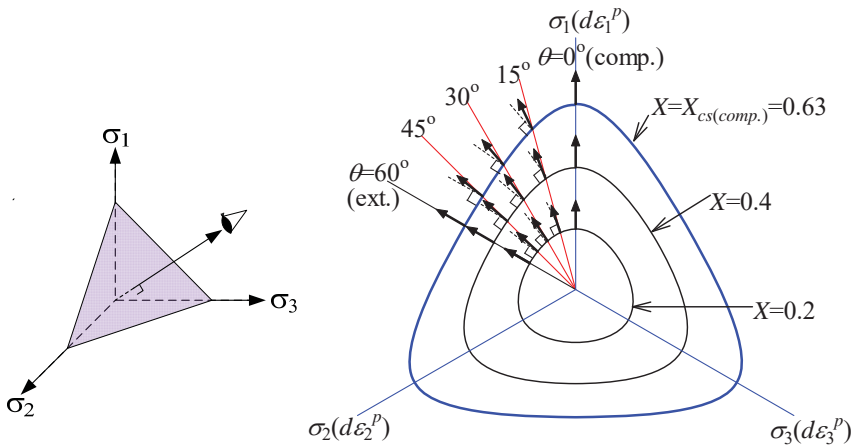
$$f = F(p, \eta = q / p) - H = 0$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

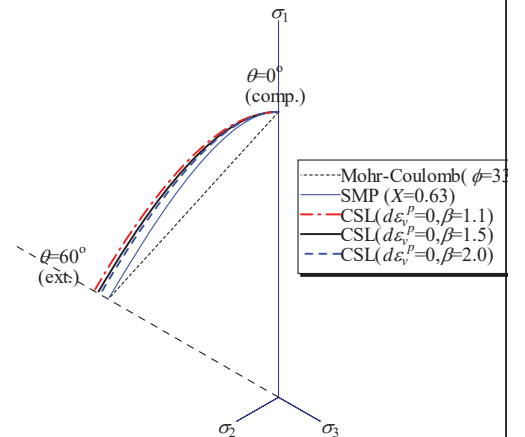


35

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 空間の正八面体面上での t_{ij} modelの考察-

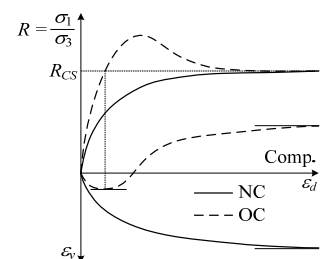


降伏曲面と塑性ひずみ増分方向



限界状態(CSL)

- σ_{ij} 空間ではなく t_{ij} 空間で流れ則を考えるので、 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ の相異なる3主応力下では塑性ひずみ増分は半径方向と降伏曲面に垂直方向の間方向になる
- 伸張側の限界状態はモール・クーロン基準やSMP基準のそれよりも大きくなる



36

おわりに

既往の土の弾塑性モデルの多くは、金属塑性論をベースに土の緒特性を考慮する事により発展してきた。その結果、弾性論や金属塑性論で用いられる応力パラメータ(p, q)を使ってモデルが作られている。弾性体や金属ではこれらの応力パラメータを使ったモデルが一般的な3次元応力条件下の挙動を説明できることは検証されているが、土ではその検証もなく地盤の解析に使われている。

ここでは、土の3次元応力下の挙動を包括的且つ合理的に説明できる t_{ij} の概念について解説した。そのポイントは以下のようにまとめられる。

- 金属材料のせん断特性は、oct面のせん断応力で規定される。一方、**土のせん断特性は空間滑動面(SMP)のせん断・垂直応力比で規定される**。これは、土のせん断特性が摩擦則に支配されることによる。
- 土はせん断の最初から塑性変形し、常に応力誘導異方性が発達する。この誘導異方性は**SMPの方向余弦(a_1, a_2, a_3)を使った修正応力 t_{ij} を使うことにより表現できる**。そして、**流れ則(直交則)はこの修正応力空間で成り立つ**。この修正応力の物理的意味は粒状体の研究(DEMではない)の成果からも説明できる。
- 前述したように、土は摩擦則に従う材料なので、**修正応力のSMPに垂直および平行な成分(t_N, t_S)を応力パラメータと規定する**。
- (p, q)の代わりに(t_N, t_S)で降伏関数を記述し、 σ_{ij} 空間ではなく t_{ij} 空間で流れ則を仮定すれば**自動的に、応力誘導異方性と中間主応力の影響を考慮できる**。
- t_{ij} の概念に基づくモデルでは当然ことながら**引張り応力は発生しないことになる**。

37

参考文献(1)

- 1) Maeda K. Hirabayashi H. and Ohmura A. (2006): Micromechanical influence of grain properties on deformation – failure behaviors of granular media by DEM. *Proc. of Geomechanics and Geotechnics of Particulate Media*, Yamaguchi, 173-179.
- 2) Matsuoka H. (1974): Stress-strain relationship of sand based on the mobilized plane, *Soils and Foundations*, **14**(2), 47-61.
- 3) Matsuoka H. and Nakai T. (1974): Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, *Proc. of JSCE*, **232**, 59-70.
- 4) Murayama S. (1964): A theoretical consideration on a behavior of sand, *Proc. of IUTAM Symposium on Rheology and Soil Mechanics*, Grenoble, 146-159.
- 5) 中井照夫・松岡元 (1980): 3主応力下の土のせん断挙動に関する統一的解釈, *土木学会論文報告集*, **301**, 65-77.
- 6) Nakai T. and Matsuoka H. (1983): Shear behavior of sand and clay under three-dimensional stress condition, *Soils and Foundations*, **23**(2), 26-42.
- 7) Nakai T. and Mihara Y. (1984): A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, *Soils and Foundations*, **24**(2), 82-94.
- 8) Nakai T. (2012): *Constitutive Modeling of Geomaterials: Principles and Applications*, CRC Press.
- 9) Nakai T., Shahin H.M., Hinokio M. and Kyokawa H. (2014): Why do constitutive models using (p and q) have problems?, *Proc of Int. Symp. On Geomechanics from Micro to Macro (IS-Cambridge 2014)*, 683-688.
- 10) Nakai T. (2018): Significance and usefulness of the t_{ij} concept, China-Euro Conference of Geotechnical Engineering, Vienna, *Desiderata Geotechnica*, Springer, 125-131
- 11) 中井照夫 (2018): 巨視的および微視的観点から見た t_{ij} の概念の意義, *地盤工学会誌*, **66**(7). 18-21.
- 12) Oda M. (1972): The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand, *Soils and Foundations*, **12**(2), 1-18.

38

参考文献(2)

- 13) Oda M. (1993): Inherent and induced anisotropy in plasticity theory of granular soils, *Mechanics of Materials*, **16**, (1-2), 35-45.
- 14) 佐武正雄(1973): 粒状態の降伏条件に関する1提案, 第28回土木学会年次学術講演会, 第3部,91-92.
- 15) Satake M. (1982): Fabric tensor in granular materials. *Proc. of IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials*, Delft, 63-68.
- 16) 佐武正雄 (1984): 地盤と土の異方性, *土と基礎*, 32(11), 5-12.