

# 陰解法によるモデルの定式化

tij地盤解析研究所  
(株)地域地盤環境研究所  
中部大学  
元名古屋工業大学

中井照夫



1

## 内容

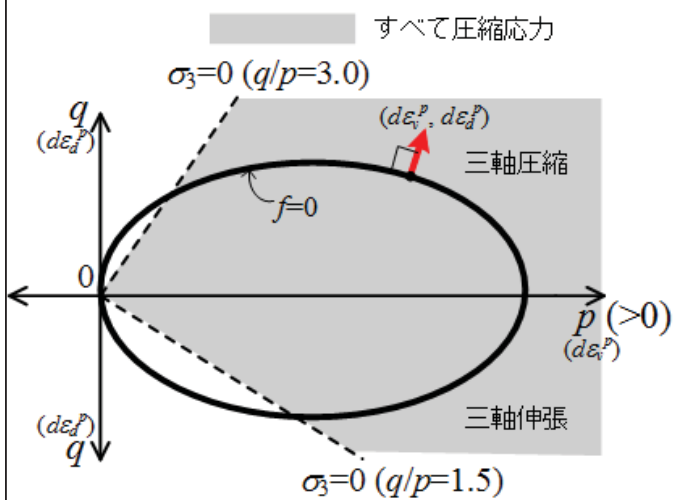
1. 弾塑性論の基本
  - 1次元の弾性および弾塑性論
  - 多次元の弾性および弾塑性論
2. 地盤材料の1次元挙動とモデル化
  - 正規圧密土
  - 過圧密土
  - 自然堆積土
  - 正規圧密土から自然堆積土までの時間効果特性
3. 地盤材料の通常の多次元モデル
  - 正規圧密土から過圧密土までのせん断挙動
  - 弾・完全塑性モデル(Drucker-Prager model, Mohr-Coulomb model)
  - Cam clay model
4. tij の概念とそれに基づく正規圧密土のモデル化(tij clay model)
  - tij の概念に基づく正規圧密土のモデル化
  - 滑動面からtijへ(付録)
  - tij の概念の意味
5. tij の概念に基づく過圧密土から自然堆積土までのモデル化(Subloading tij model )
  - 過圧密土(正規圧密土を含む)のモデル化
  - ひずみ増分方向の応力経路依存性を考慮したモデル化
  - 自然堆積土のモデル化
  - 正規圧密土から自然堆積土までの時間効果特性の表現
6. 陰解法によるモデルの定式化
  - 引張り応力のでない弾性式
  - Return Mapping

2

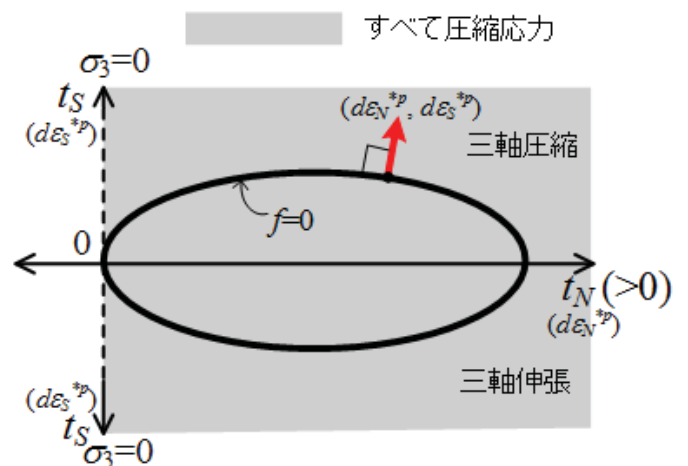
# 引張り応力のでない弾性式

3

## 既往および $t_{ij}$ の概念によるモデルの降伏曲面と応力の取り得る領域



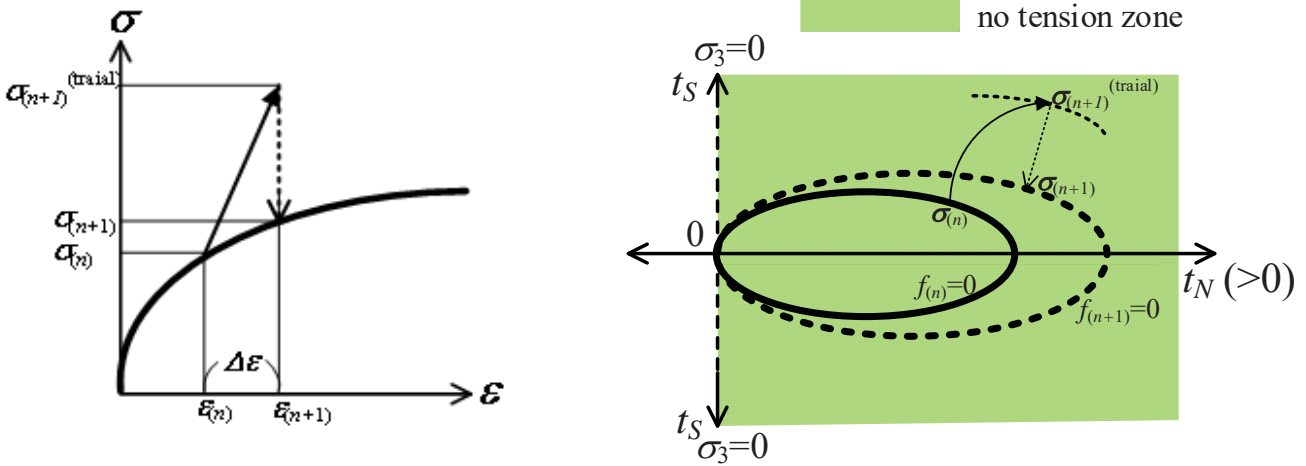
$(q, p)$  を応力パラメータとする弾塑性論の降伏曲面と流れ則



$t_{ij}$  の概念に基づく  $(t_N, t_S)$  を応力パラメータとする弾塑性論の降伏曲面と流れ則

4

# Return mappingアルゴリズムと必要とされる弾性式



現状態を $n$ とし、その時のひずみおよび応力を $\epsilon_{(n)}$ ,  $\sigma_{(n)}$ とする。この状態から、 $\Delta\epsilon$ のひずみ増分を与えた状態を $n+1$ とする。Return mappingではまず $\Delta\epsilon$ のひずみ増分はすべて弾性ひずみと仮定し、試行弾性状態の応力 $\sigma_{(n+1)}^{(trial)}$ を求め、その後 $n+1$ で降伏関数 $f_{(n+1)}=0$ を満たす応力状態がなるように解くことになる。

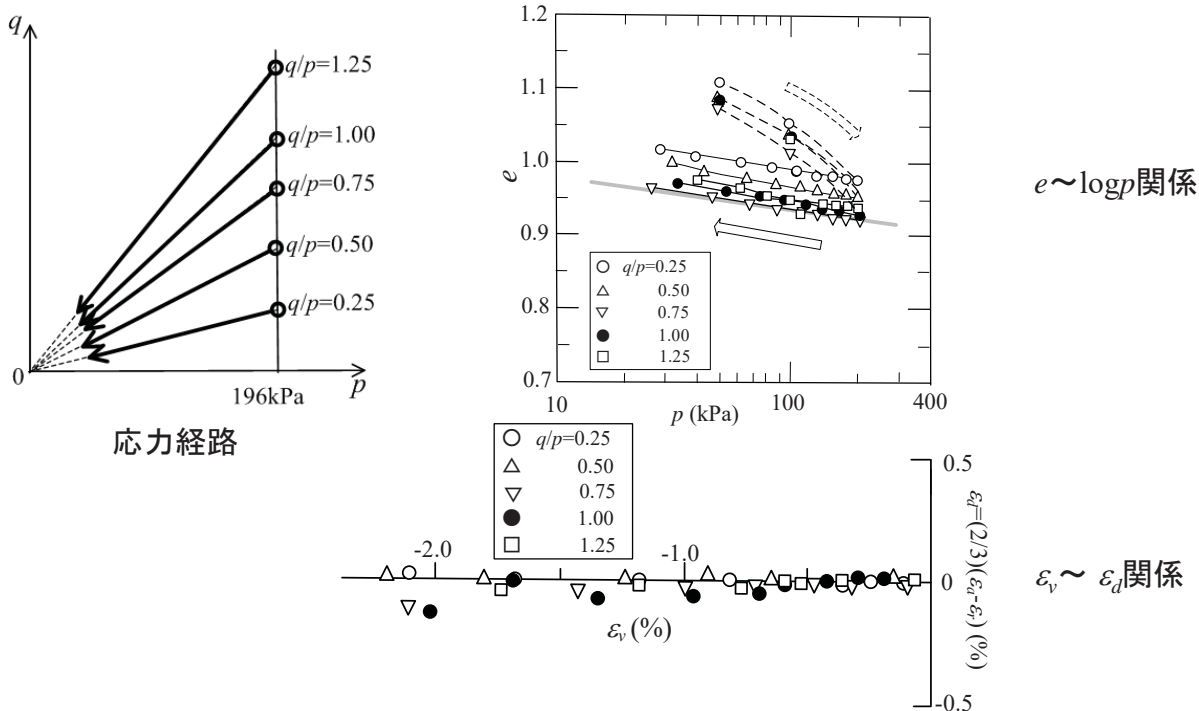


そこでは次の2条件を満たす弾性式が必要:

- 応力あるいはひずみ経路によらず一義的に応力と弾性ひずみが決まる。
- 地盤材料は引張り応力に抵抗しないので、如何なる弾性ひずみが生じてても引張り応力は発生しない。

# 正規圧密粘土の応力比一定除荷試験

(大槓(1979):京学位論文)

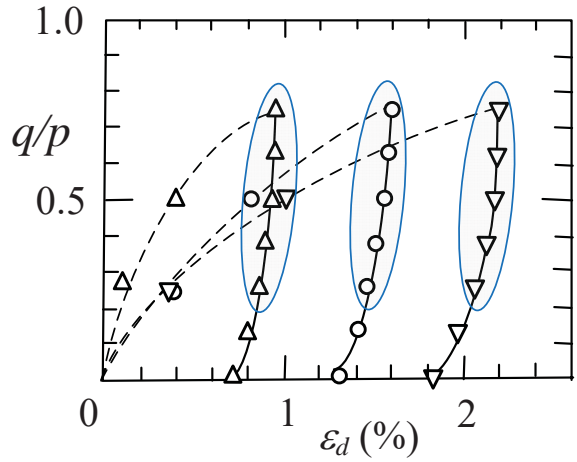
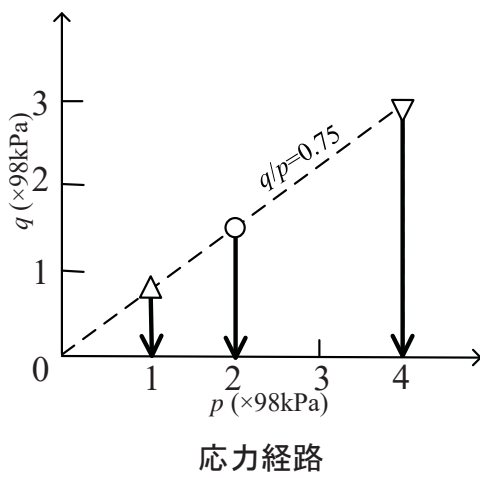


応力比一定条件下の弾性挙動では、 $e \sim \log p$ 関係は応力比の影響を受けない。またせん断ひずみは生じず等方的な弾性変形をする。

砂についても同様の実験結果がEl-Shoby(1969)他もよって報告されている

# 正規圧密粘土の平均応力一定除荷試験

(大槓(1979):京大学位論文)

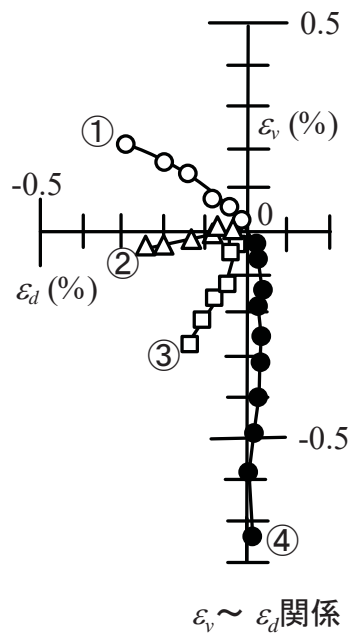
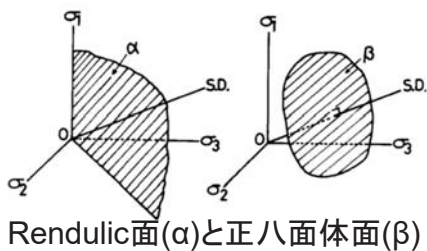
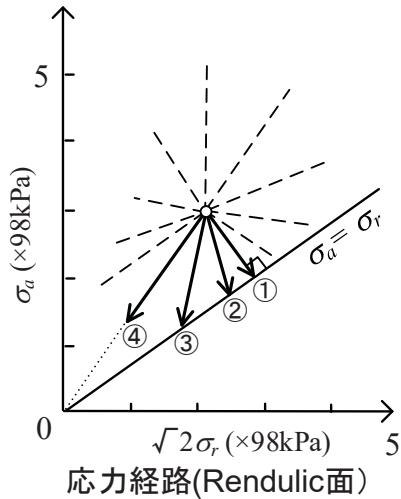


せん断時の弾性挙動では、応力比～ひずみ関係は拘束応力の影響を受けない。言い換えればせん断時の弾性挙動はせん断応力ではなく応力比で決められる。

7

# 正規圧密粘土のStress probe除荷試験

(大槓(1979):京大学位論文)



平均応力一定条件下の除荷時(path①)では体積圧縮が生じる。言い換えれば平均応力一定条件下の載荷時の弾性成分は体積膨張となる。応力比一定経路では前述したように偏差弾性ひずみはほぼゼロとなる。

8

# 既往の地盤材料の弾性式

## 弾性成分の特性:

$$1D: \quad \varepsilon = \frac{\kappa}{1+e_0} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} \Rightarrow d\varepsilon = \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{1}{\sigma} d\sigma$$

$$3D: \quad \varepsilon_v = \frac{\kappa}{1+e_0} \ln \frac{p}{p_0} \Rightarrow d\varepsilon_v = \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{1}{p} dp = \frac{1}{K} = \frac{3(1-2\nu)}{E}$$

## 増分型Hooke則:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma^{(1)} \\ d\sigma^{(2)} \\ d\sigma^{(3)} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) \\ \nu/(1-\nu) & 1 & \nu/(1-\nu) \\ \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon^{(1)} \\ d\varepsilon^{(2)} \\ d\varepsilon^{(3)} \end{Bmatrix}$$

$$\text{where } E = \frac{3(1-2\nu)(1+e_0)}{\kappa} p$$

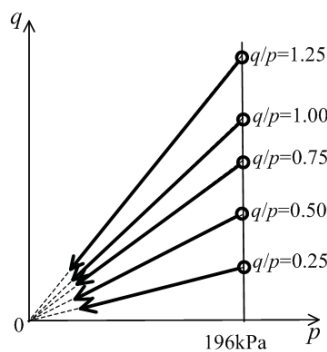
一般応力増分 $d\sigma_{ij}$ は

$$d\sigma_{ij} = \left( K - \frac{2}{3} G \right) d\varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G d\varepsilon_{ij}$$

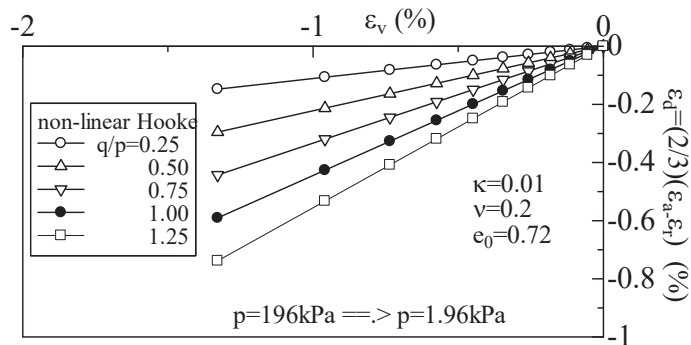
9

弾性ひずみ増分の主軸の方向は主応力増分の方角と一致。

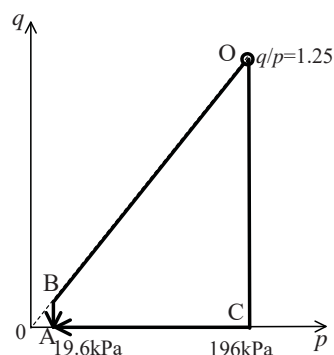
# 非線型Hooke則による解析結果



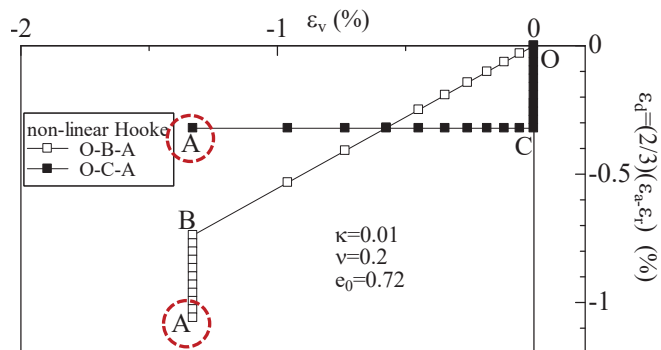
応力経路



主応力比一定除荷試験の解析結果



応力経路



応力経路(O-B-A)および(OCA)下での解析結果

10

# 提案弾性式

## 弾性成分の特性:

$$1D: \quad \varepsilon = \frac{\kappa}{1+e_0} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

$$3D: \quad \begin{cases} \varepsilon^{(1)} \\ \varepsilon^{(2)} \\ \varepsilon^{(3)} \end{cases} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \ln(\sigma^{(1)}/p_a) \\ \ln(\sigma^{(2)}/p_a) \\ \ln(\sigma^{(3)}/p_a) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ln(\sigma^{(1)}/p_a) \\ \ln(\sigma^{(2)}/p_a) \\ \ln(\sigma^{(3)}/p_a) \end{cases} = \frac{S(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) \\ \nu/(1-\nu) & 1 & \nu/(1-\nu) \\ \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon^{(1)} \\ \varepsilon^{(2)} \\ \varepsilon^{(3)} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sigma^{(1)} = P_a \exp \left\{ \Delta \left( \varepsilon^{(1)} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(2)} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(3)} \right) \right\} \\ \sigma^{(2)} = P_a \exp \left\{ \Delta \left( \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(3)} \right) \right\} \\ \sigma^{(3)} = P_a \exp \left\{ \Delta \left( \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(1)} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)} \right) \right\} \end{cases} \quad (3) \quad \text{where, } \Delta = \frac{S(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4)$$

ここに、 $\sigma^{(1)}=\sigma^{(2)}=\sigma^{(3)}=P_a$ の時弾性ひずみをゼロとする( $P_a$ : 大気圧)。  
また、弾性ひずみの主軸の方向は主応力の方向と一致するとする。

11

## 提案弾性式の特徴

- 体積ひずみ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)} \\ &= \frac{1}{S} (1-2\nu) \left\{ \ln(\sigma^{(1)}/P_a) + \ln(\sigma^{(2)}/P_a) + \ln(\sigma^{(3)}/P_a) \right\} \\ &= \frac{1}{S} (1-2\nu) \ln \frac{\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\sigma^{(3)}}{P_a^3} = \frac{1}{S} (1-2\nu) \ln \frac{I_3}{P_a^3} \end{aligned} \quad (5)$$

- 主応力 ( $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$ ) が ( $\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)}, \sigma_0^{(3)}$ ) から  $k(\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)}, \sigma_0^{(3)})$  に変化したとき

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \frac{1}{S} (1-2\nu) \left\{ \ln(k\sigma_0^{(1)}/\sigma_0^{(1)}) + \ln(k\sigma_0^{(2)}/\sigma_0^{(2)}) + \ln(k\sigma_0^{(3)}/\sigma_0^{(3)}) \right\} \\ &= \frac{1}{S} (1-2\nu) \ln \frac{k^3 \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} \sigma_0^{(3)}}{\sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} \sigma_0^{(3)}} = \frac{3}{S} (1-2\nu) \ln k \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{ここに、} \frac{3}{S} (1-2\nu) \text{ は } \frac{\kappa}{1+e_0} \text{ に対応するので、} S = \frac{3(1-2\nu)(1+e_0)}{\kappa} \quad (7)$$

応力比が変化しない応力経路下では弾性体積ひずみは  
勾配  $\kappa/(1+e_0)$  の  $\varepsilon_v \propto \ln p$  関係を満たす。

- 偏差ひずみ  $\varepsilon^{(\alpha)} - \varepsilon^{(\beta)}$  ( $\alpha \neq \beta$ ) は次式で与えられる

$$\varepsilon^{(\alpha)} - \varepsilon^{(\beta)} = \frac{1}{S} \left( \ln \frac{\sigma^{(\alpha)}}{P_a} - \nu \ln \frac{\sigma^{(\beta)}}{P_a} + \nu \ln \frac{\sigma^{(\alpha)}}{P_a} - \ln \frac{\sigma^{(\beta)}}{P_a} \right) = \frac{1}{S} (1+\nu) \ln \frac{\sigma^{(\alpha)}}{\sigma^{(\beta)}} \quad (8)$$

したがって、応力比一定条件下では弾性ひずみは常に等方的で、  
弾性偏差ひずみは応力比の変化だけで関係づけられる

12

中井・星川(1990): “粘性土の弾性ひずみの定式化について” 中部地盤工学シンポジウムより

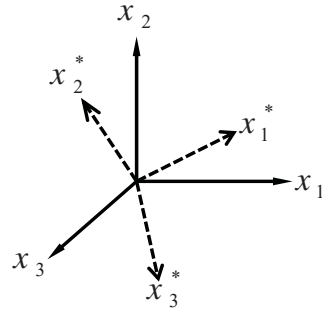
## 一般座標系での提案弾性式

応力 $\sigma_{ij}$ は主応力 $\sigma^{(\alpha)}$ を使って、

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma^{(\alpha)} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} \quad (9)$$

弾性ひずみと応力の主軸が一致することから

$$\varepsilon^{(\alpha)} = \varepsilon_{kl} n_k^{(\alpha)} n_l^{(\alpha)} \quad (10) \\ (\alpha = 1, 2, 3)$$



$x_i$ : 応力  $\sigma_{ij}$  の座標系  
 $x_\alpha^*$ : 主応力  $\sigma^{(\alpha)}$  の座標系

$$n_i^{(\alpha)} = \frac{\partial x_\alpha^*}{\partial x_i} : \text{応力の固有値 } \sigma^{(\alpha)} (\alpha=1,2,3) \text{ に対応する固有ベクトル}$$

(9), (10)式を使って、(3)式の主応力( $\sigma^{(\alpha)}$ )～弾性主ひずみ( $\varepsilon^{(\beta)}$ )関係式は一般座標系の応力( $\sigma_{ij}$ )～弾性ひずみ( $\varepsilon_{kl}$ )関係に変換できる。

また、石川・寺田・京谷・社本(2010): 土木学会論文集(C), 66(1), 145-155を参考に、速度形の弾性式にも変換可能である。

13

## 速度形の提案弾性式

対称テンソル $b_{kl}$ を独立変数とする対称テンソル値関数 $G_{ij}(b_{kl})$ の微分はそれぞれの固有値、固有値の微分および固有ベクトルを使って次式で計算できる(Miehe(1998))

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial b_{kl}} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial b^{(\beta)}} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} n_k^{(\beta)} n_l^{(\beta)} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \frac{G^{(\alpha)} - G^{(\beta)}}{b^{(\alpha)} - b^{(\beta)}} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\beta)} \frac{1}{2} (n_k^{(\alpha)} n_l^{(\beta)} + n_k^{(\beta)} n_l^{(\alpha)})$$

ここに、 $G^{(\alpha)}, b^{(\alpha)} (\alpha=1, 2, 3)$ は対称テンソル $G_{ij}, b_{kl}$ の固有値を、 $n_i^{(\alpha)} (i=1,2,3)$ は両テンソルの固有ベクトルを表す。

応力・ひずみ関係の速度形は次式で表せる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}$$

$\sigma^{(\alpha)}, \varepsilon^{(\alpha)}$  はそれぞれ $G^{(\alpha)}, b^{(\alpha)}$ に対応するので、 $C_{ijkl}$  は次式で与えられる。

$$C_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \sigma^{(\alpha)}}{\partial \varepsilon^{(\beta)}} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} n_k^{(\beta)} n_l^{(\beta)} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \frac{\sigma^{(\alpha)} - \sigma^{(\beta)}}{\varepsilon^{(\alpha)} - \varepsilon^{(\beta)}} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\beta)} \frac{1}{2} (n_k^{(\alpha)} n_l^{(\beta)} + n_k^{(\beta)} n_l^{(\alpha)})$$

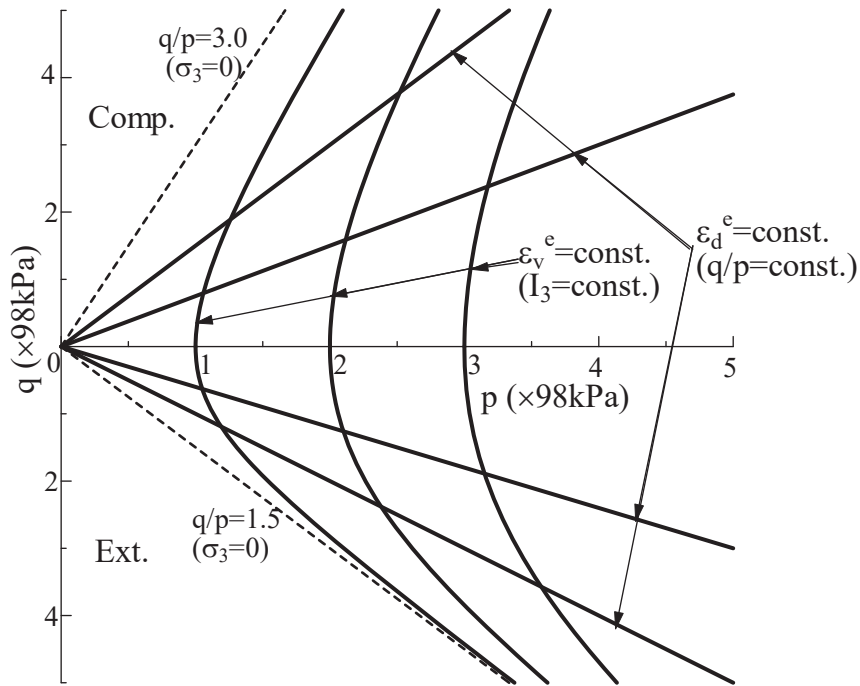
ここに、 $\sigma^{(\alpha)}$  の $\varepsilon^{(\beta)}$ による微分は前出の(3), (4)式から次式となる

$$\frac{\partial \sigma^{(\alpha)}}{\partial \varepsilon^{(\beta)}} = \begin{cases} \Delta \cdot \sigma^{(\alpha)} & (\alpha = \beta) \\ \Delta \cdot \sigma^{(\alpha)} \frac{\nu}{1-\nu} & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

$\varepsilon^{(\alpha)} = \varepsilon^{(\beta)}$  の時はロピタルの定理を使って、 $(\sigma^{(\alpha)} - \sigma^{(\beta)}) / (\varepsilon^{(\alpha)} - \varepsilon^{(\beta)})$  を $\partial \sigma^{(\alpha)} / \partial \varepsilon^{(\alpha)} = \Delta \cdot \sigma^{(\alpha)}$  に置き換える。

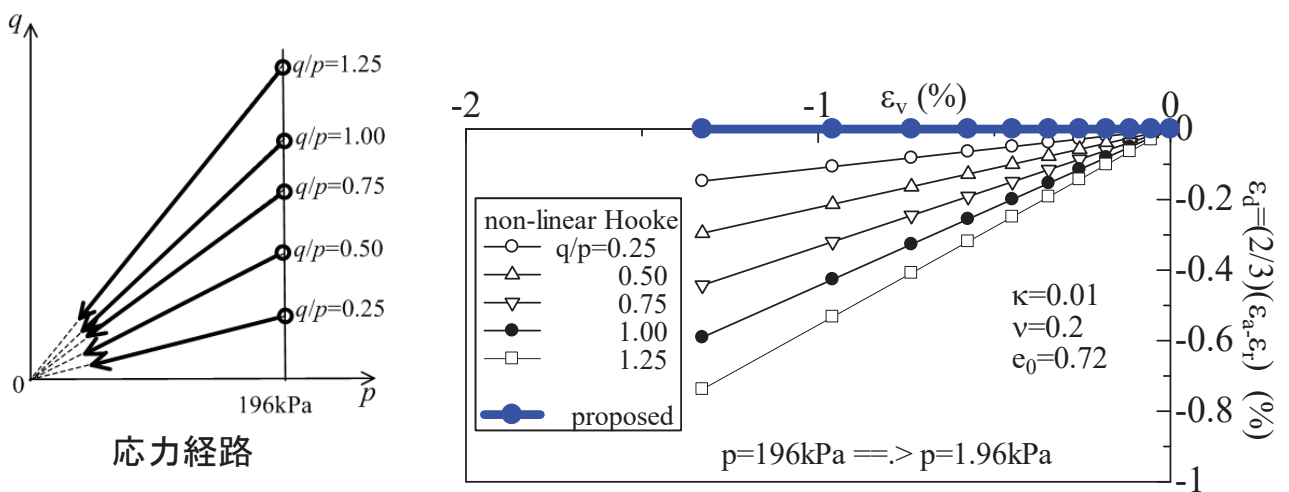
14

# (q, p)平面で表した提案弾性式の等 $\varepsilon_v$ 線および等 $\varepsilon_d$ 線



15

# 正規圧密粘土の応力比一定除荷試験の両弾性式による解析

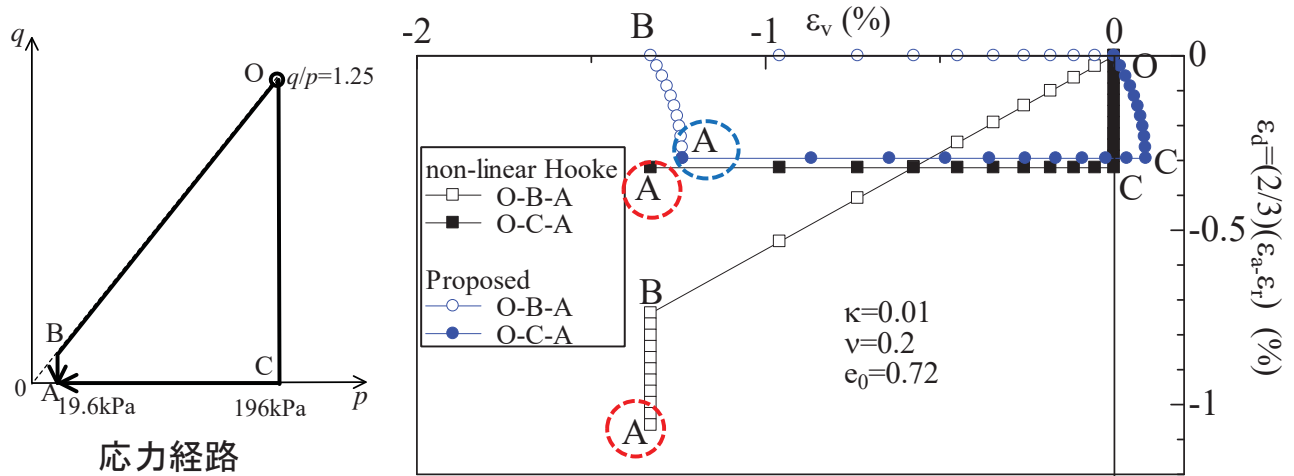


非線型Hooke則および提案弾性式による主応力比一定除荷試験の解析結果

16



# 異なる応力経路下での弾性ひずみの両弾性式による解析

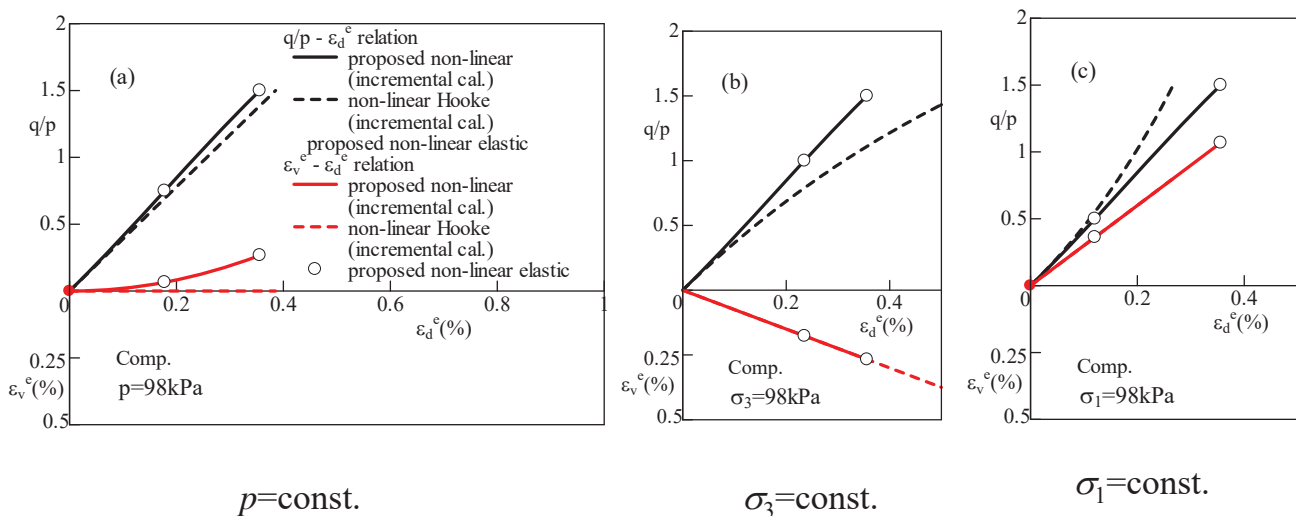


応力経路(O-B-A)および(OCA)下での弾性ひずみの解析結果

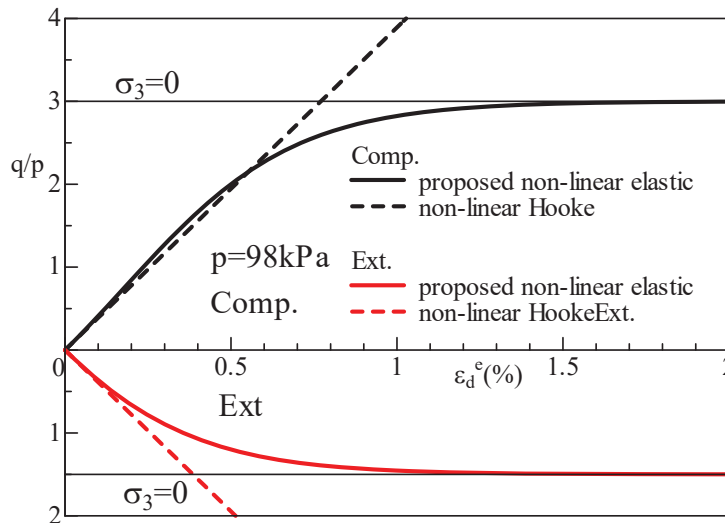
# 三軸圧縮条件下での両弾性式による弾性ひずみの解析結果

実線: 提案弾性式  
 破線: 非線形Hooke則

黒い線:  $q/p \sim \epsilon_d$  関係  
 赤い線:  $\epsilon_v \sim \epsilon_d$  関係



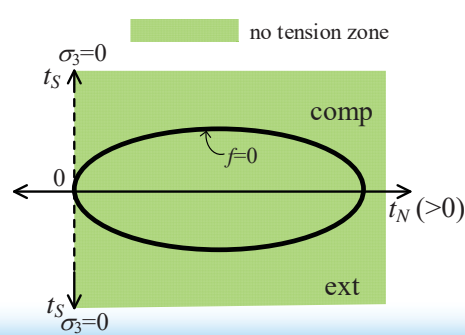
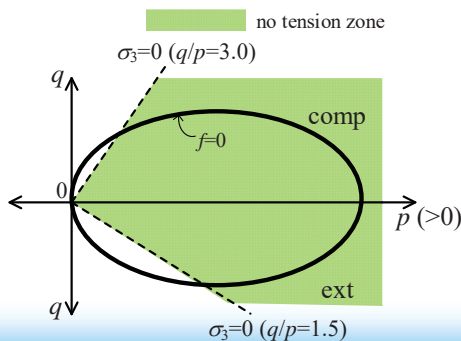
# 三軸圧縮および伸張条件下での解析結果と引張り応力の生じない領域



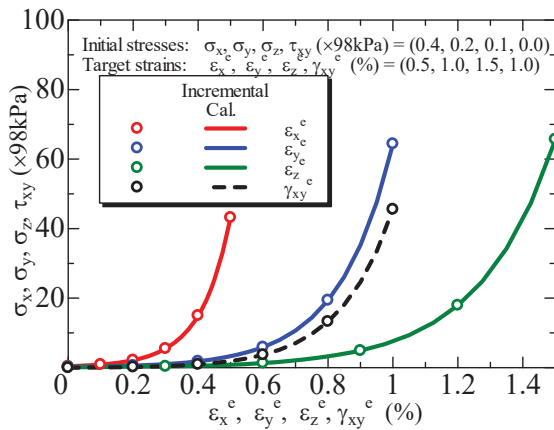
実線: 提案弾性式  
破線: 非線形Hooke則

$p = \text{const.}$

$q/p \sim \varepsilon_d$  関係 (上半分は3軸圧縮、下半分は3軸伸張)

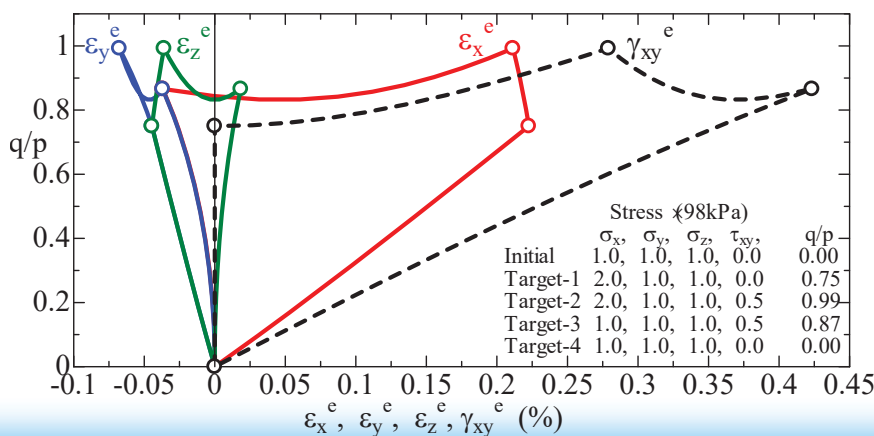


# 主軸の回転を含む条件下での提案弾性式の検証



プロットは積分型による計算  
曲線は速度型による計算

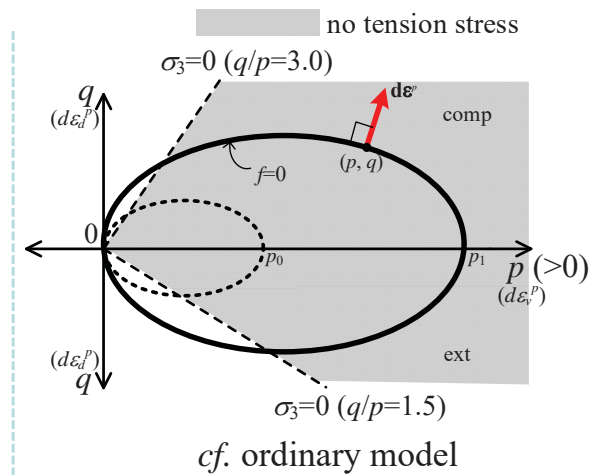
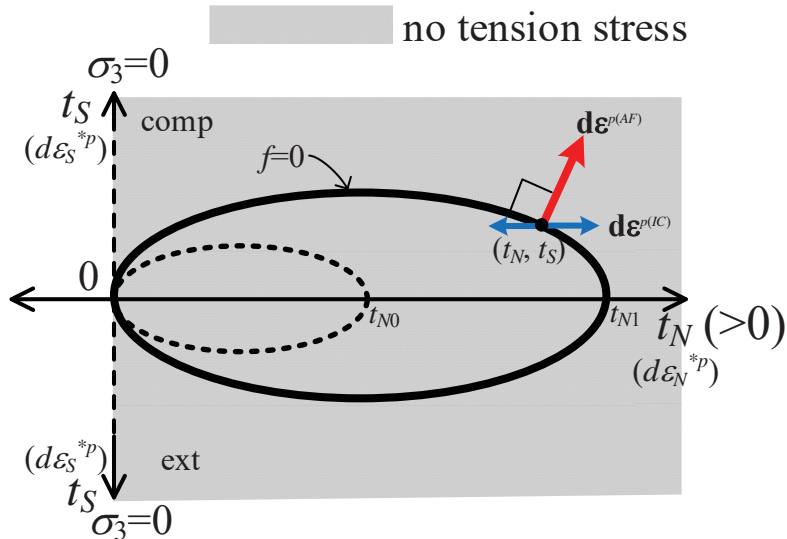
主軸の回転を含む弾性ひずみ経路から応力を計算



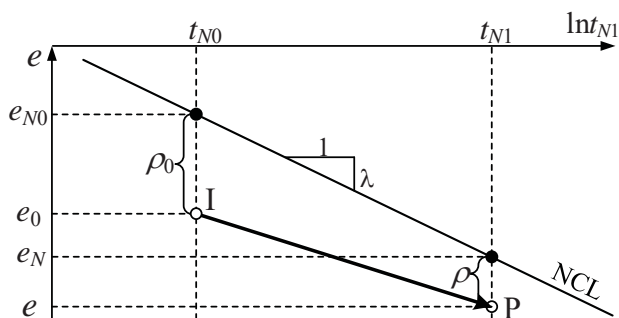
主軸の回転を含む応力経路から弾性ひずみを計算

# Return Mapping

## Subloading tij model の概要



tij modelの初期および現降伏曲面と塑性流れ則



$$f = F - \left\{ H + \frac{\rho_0 - \rho}{\lambda - \kappa} \right\} = 0$$

where,  $F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}}$   $H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p$

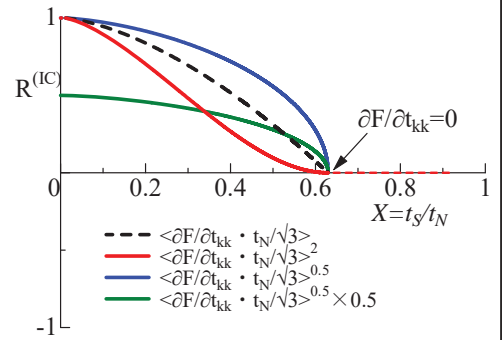
$$\rho = \rho_0 - (\lambda - \kappa) \ln(t_{N1}/t_{N0}) + \varepsilon_v^p (1 + e_0)$$

(弾性、塑性に拘わらずρを更新)

# Modelの基本式 (iVersion=3; iAssoc=3)

$$\bullet d\varepsilon_{ij}^p = \frac{dF}{h^p} \cdot \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - \frac{k^{(IC)} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^m \cdot \frac{1}{t_N} dt_N}{h^{p(IC)}} \cdot \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} + \frac{k^{(IC)} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^m \cdot \frac{1}{t_N} dt_N}{h^{p(IC)}} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3}$$

$$= \Lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} + L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \frac{\delta_{ij}}{3} \quad \left( \begin{array}{l} \text{通常} \\ k^{(IC)} = 1, m = 2 \end{array} \right) \quad (a)$$



$$\left( \begin{array}{l} \text{ここに, } h^p = \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} + \sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\} \\ h^{p(IC)} = \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \left\{ 1 + \left\langle \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\rangle \right\} \\ L^{(IC)} = \frac{R^{(IC)}}{h^{p(IC)}} = \frac{k^{(IC)} \left\langle \left( \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \right) / \left( \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle^m}{h^{p(IC)}} \\ \text{(通常 } k^{(IC)} = 1, m = 2 \text{)} \end{array} \right)$$

$$G = a\rho^{l_p}, \quad Q = b\omega \quad (\text{通常, } l_p = 1).$$

$$\bullet d\varepsilon_v^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \quad (b)$$

$$\bullet d\rho = -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \Lambda \quad (c)$$

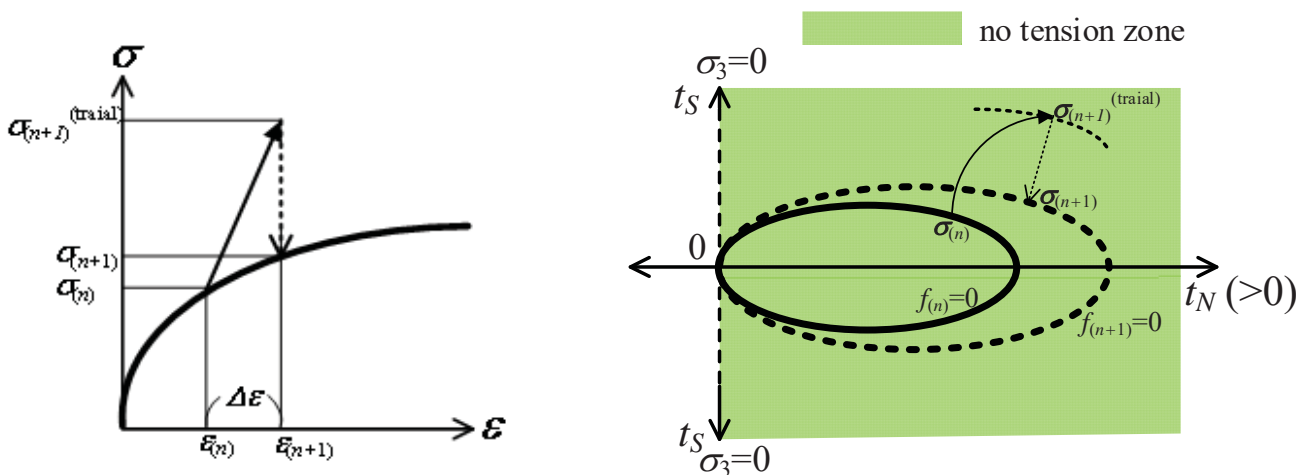
$$\bullet d\omega = -(1+e_0)\sqrt{3}Q \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Lambda \quad (d)$$

$$\bullet f = F - H - \frac{1}{\lambda-\kappa} (\rho_0 - \rho) = 0 \quad (e)$$

$$\left( \begin{array}{l} F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), \quad \zeta(X) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{X}{M^*} \right)^\beta \\ \text{(where } X = t_s/t_N \text{)} \\ H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda-\kappa} = \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \varepsilon_v^p \end{array} \right)$$

23

## Return mappingアルゴリズム



現状態を $n$ とし、その時のひずみおよび応力を $\varepsilon_{(n)}$ ,  $\sigma_{(n)}$ とする。この状態から、 $\Delta\varepsilon$ のひずみ増分を与えた状態を $n+1$ とする。Return mappingではまず $\Delta\varepsilon$ のひずみ増分はすべて弾性ひずみと仮定し、試行弾性状態の応力 $\sigma_{(n+1)}^{(trial)}$ を求め、その後 $n+1$ で降伏関数 $f_{(n+1)}=0$ を満たす応力状態がなるように解くことになる。

## Return mapping のアルゴリズム(1)

① 弾性予測子：現状態を $n$ とし、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ を与えた時 $n+1$ を試行弾性状態で評価する

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

$$\rho_{n+1}^{(trial)} = \rho_n, \quad \omega_{n+1}^{(trial)} = \omega_n \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{p(trial)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n}^p \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(trial)} = \mathbf{E}^e \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} \right) \quad (4)$$

$$\bullet \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} - L^{(IC)} \ln \frac{t_{N,n+1}}{t_{N,n}} \frac{\mathbf{N}_{n+1}}{\text{tr}(\mathbf{N}_{n+1})} + L^{(IC)} \ln \frac{t_{N,n+1}}{t_{N,n}} \mathbf{N}^{(IC)} = 0 \quad (5)$$

$$\bullet \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{p(trial)} - \Delta\gamma \cdot \text{tr}(\partial F / \partial \mathbf{t}) = 0 \quad (6)$$

$$\bullet \rho_{n+1} - \rho_{n+1}^{(trial)} - \Delta\gamma \left\{ -(1+e_0) \sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\} = 0 \quad (7)$$

$$\bullet \omega_{n+1} - \omega_{n+1}^{(trial)} - \Delta\gamma \left\{ -(1+e_0) \sqrt{3} Q \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \right\} = 0 \quad (8)$$

$$\bullet f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^p, \rho_{n+1}, \omega_{n+1}) = F_{n+1} - H_{n+1} - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho_{n+1}) = 0 \quad (9)$$

式(5)~(9)を $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e, \rho_{n+1}, \omega_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^p, \Delta\gamma$ について解く。

また、 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ は $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{E}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)$ より決められる

②  $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(trial)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{p(trial)}, \rho_{n+1}^{(trial)}, \omega_{n+1}^{(trial)}) \leq 0$ の時は弾性なので

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \omega_{n+1} = \omega_n \text{ とする}$$

25

## Return mapping のアルゴリズム(2)

式(5)~(9)の各項は次式を意味する

$$\mathbf{N} = \left( \partial F / \partial t_{11} \quad \partial F / \partial t_{22} \quad \partial F / \partial t_{33} \quad 2\partial F / \partial t_{12} \quad 2\partial F / \partial t_{23} \quad 2\partial F / \partial t_{31} \right)^T \quad (10)$$

$$\mathbf{N}^{(IC)} = (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \quad (11)$$

$$L^{(IC)} = \frac{k^{IC} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^m}{h^{p(IC)}} = \frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^2}{h^{p(IC)}} \quad (12)$$

$$G = a\rho^{l_p}, \quad Q = b\omega \quad (13)$$

$$\text{tr}(\partial F / \partial \mathbf{t}) = \partial F / \partial t_{11} + \partial F / \partial t_{22} + \partial F / \partial t_{33} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} f &= F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) \\ &= \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \boldsymbol{\varepsilon}_v^p - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

26

## 直接積分で $\omega$ を求める

(8)式の $\omega = \omega_{n+1}$ は次のように直接積分して求める

$$d\omega = -(1+e_0)\sqrt{3}Q \left\| d\varepsilon_{ij}^p \right\| = -(1+e_0)\sqrt{3}Q \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| d\gamma, \quad Q = b\omega$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{b\omega} d\omega &= \int -(1+e_0)\sqrt{3} \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| d\gamma \\ \left[ \frac{1}{b} \ln \omega \right]_{\omega_n}^{\omega} &= -(1+e_0)\sqrt{3} \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Delta\gamma \\ \ln \frac{\omega}{\omega_n} &= -b(1+e_0)\sqrt{3} \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Delta\gamma \\ \omega &= \omega_n \exp \left( -b(1+e_0)\sqrt{3} \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Delta\gamma \right) \end{aligned}$$

$$Q = b\omega$$

27

## 縮約したreturn mappingのアルゴリズム(1)

下添字の $n+1$ を省略して表示

$$\left[ \begin{aligned} \bullet b_1 &= \varepsilon^e - (\varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon) + \Delta\gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \left( \frac{\mathbf{N}}{\text{tr}\mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) = 0 \\ \bullet b_2 &= \rho - \rho_n - \Delta\gamma \left\{ -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{a\rho^{l_p}/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\} = 0 \\ \bullet b_3 &= \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ \varepsilon_{v,n}^p + \Delta\gamma \text{tr}\mathbf{N} \right\} - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) = 0 \end{aligned} \right.$$

where,

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{23} \ \gamma_{31})^T$$

$$\mathbf{t} = (t_{11} \ t_{22} \ t_{33} \ t_{12} \ t_{23} \ t_{31})^T$$

$$\mathbf{N} = (\partial F / \partial t_{11} \ \partial F / \partial t_{22} \ \partial F / \partial t_{33} \ 2\partial F / \partial t_{12} \ 2\partial F / \partial t_{23} \ 2\partial F / \partial t_{31})^T$$

$$\mathbf{N}^{(IC)} = (1/3 \ 1/3 \ 1/3 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$F = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X)$$

$$\text{tr}\mathbf{N} = \text{tr}(\partial F / \partial \mathbf{t}) = \partial F / \partial t_{11} + \partial F / \partial t_{22} + \partial F / \partial t_{33}$$

$$G = a\rho^{l_p}, \quad Q = b\omega$$

$$L^{(IC)} = \frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^2}{h^{p(IC)}}$$

28

## 縮約したreturn mappingのアルゴリズム(2)

$$F = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial t_N} \frac{\partial t_N}{\partial t_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t_{ij}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_N} = \frac{1}{t_N}, \quad \frac{\partial F}{\partial X} = \zeta'(X), \quad \frac{\partial t_N}{\partial t_{ij}} = a_{ij}, \quad \frac{\partial X}{\partial t_{ij}} = \frac{1}{X \cdot t_N} (x_{ij} - X^2 a_{ij})$$

対称テンソルの微分  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}_{klmn}$  は各々の固有値の微分と固有ベクトルを利用して求める  
(等方テンソル値関数の微分法は前述の (Miehe(1997), Neto, Peric & Owen(2008)) を参照)

ここに、固有値の微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial a_i}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left( \frac{\sqrt{I_3}}{\sqrt{I_2}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \right), \quad \frac{\partial t_i}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left( \frac{\sqrt{I_3}}{\sqrt{I_2}} \sqrt{\sigma_i} \right) \quad \text{where } I_2, I_3: 2\text{nd and 3rd stress invariants}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left( \frac{t_i}{t_N} - a_i \right)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial (\partial F / \partial t_i)}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left\{ \frac{a_i}{t_N} + \zeta'(X) \frac{1}{X \cdot t_N} (x_i - X^2 a_i) \right\}$$

$$= \frac{1}{t_N} \frac{\partial a_i}{\partial \sigma_j} + a_i \frac{\partial (1/t_N)}{\partial \sigma_j} + \frac{\partial \zeta'(X)}{\partial \sigma_j} \frac{1}{X \cdot t_N} (x_i - X^2 a_i) + \zeta'(X) \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left( \frac{x_i}{X \cdot t_N} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left( \frac{X a_i}{t_N} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial \text{tr} \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = M_{11mn} + M_{22mn} + M_{33mn}$$

29

## 縮約したreturn mappingのアルゴリズム(3)

$$\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{I} + \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} - L^{(IC)} \left( \frac{\mathbf{N}}{\text{tr} \mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) \frac{1}{t_N} \frac{\partial t_N}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{N} \frac{\partial \text{tr} \mathbf{N}}{(\text{tr} \mathbf{N})^2} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

$$- \left( \frac{\mathbf{N}}{\text{tr} \mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \frac{\partial L^{(IC)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

where

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \Delta \gamma} = \mathbf{N}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = -\Delta \gamma (1 + e_0) \sqrt{3} \left\{ \left( \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N^2} \right) \frac{\partial t_N}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \left( \frac{G k_a / (1+k_a X)^2 + Q k_b / (1+k_b X)^2}{t_N} \right) \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \Delta \gamma} = (1 + e_0) \sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N}$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \rho} = 1 + \Delta \gamma (1 + e_0) \sqrt{3} \frac{a_l \rho^{l_p - 1}}{t_N (1 + k_a X)}$$

30

## 縮約したreturn mappingのアルゴリズム(4)

$$\begin{cases} \frac{\partial b_3}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{1}{t_N} \frac{\partial t_N}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + \zeta'(X) \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} - \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \Delta\gamma \frac{\partial \text{tr}\mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \\ \frac{\partial b_3}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \text{tr}\mathbf{N} \\ \frac{\partial b_3}{\partial \rho} = \frac{1}{\lambda-\kappa} \end{cases}$$

where,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} &= \mathbf{D}^e = D_{ijkl}^e \\ \mathbf{N} &= \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{b}_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^e - (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) + \Delta\gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \left( \frac{\mathbf{N}}{\text{tr}\mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) \\ \rho - \rho_n + \Delta\gamma(1+e_0)\sqrt{3} \frac{a\rho^{l_p}/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \\ \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n}^p + \Delta\gamma \text{tr}\mathbf{N} \right\} - \frac{1}{\lambda-\kappa} (\rho_0 - \rho) \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^e \\ \Delta\gamma \\ \rho \end{cases}$$

31

として、 $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  の非線形連立方程式をNewton法で解く。

## 縮約したreturn mappingのアルゴリズム(5)

ここに、 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  のJacobian  $\mathbf{J} = \mathbf{b}'(\mathbf{x})$  は

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} & \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial b_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} & \frac{\partial b_2}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial b_2}{\partial \rho} \\ \frac{\partial b_3}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} & \frac{\partial b_3}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial b_3}{\partial \rho} \end{bmatrix}$$

で与えられるので、Newton法の漸化式は次式で表せる。

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - (\mathbf{J}^k)^{-1} \mathbf{b}^k$$

上式を反復的に収束判定を満たすまで解けばよい。

32



## Consistent接線剛性の導出(1)

Return MappingをFEMに適用するには整合した応力増分・ひずみ増分間の線形関係が必要となるので、弾塑性適合接線係数を求める。

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ となるので、前述の $\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ は次のように書き換えられる

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta\gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \left( \frac{\mathbf{N}}{\text{tr}\mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) \\ \rho - \rho_n + \Delta\gamma(1+e_0)\sqrt{3} \frac{a\rho^{l_\rho}/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \\ \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n}^p + \Delta\gamma \text{tr}\mathbf{N} \right\} - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

上式の増分をとって

$$\square \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{D}^e)^{-1} + \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - L^{(IC)} \left( \frac{\mathbf{N}}{\text{tr}\mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) \frac{1}{t_N} \frac{\partial t_N}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\text{tr}\mathbf{N}} - \mathbf{N} \frac{\partial \text{tr}\mathbf{N}}{(\text{tr}\mathbf{N})^2} \right) \\ - \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \left( \frac{\mathbf{N}}{\text{tr}\mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) \left( \frac{1}{h^{p(IC)}} \frac{\partial R^{(IC)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{R^{(IC)}}{h^{p(IC)2}} \frac{\partial h^{p(IC)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \end{array} \right\} : \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{N} \cdot d\Delta\gamma = \mathbf{d}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

where,  $\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{D}^e)^{-1} : \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \\ L^{(IC)} = \frac{R^{(IC)}}{h^{p(IC)}} \end{array} \right.$

N.B. (AF) modelでは  の部分はいらない 33

## Consistent接線剛性の導出(2)

$$\square \left\{ -\Delta\gamma(1+e_0)\sqrt{3} \left( \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N^2} \frac{\partial t_N}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{Gk_a/(1+k_a X)^2 + Qk_b/(1+k_b X)^2}{t_N} \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right\} : \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \\ + \left\{ (1+e_0)\sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\} \cdot d\Delta\gamma + \left\{ 1 + \Delta\gamma(1+e_0)\sqrt{3} \frac{a l_\rho \rho^{l_\rho-1}}{t_N(1+k_a X)} \right\} \cdot d\rho = 0$$

$$\square \left\{ \frac{1}{t_N} \frac{\partial t_N}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \zeta'(X) \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \Delta\gamma \frac{\partial \text{tr}\mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} : \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \text{tr}\mathbf{N} \cdot d\Delta\gamma + \frac{1}{\lambda - \kappa} \cdot d\rho = 0$$

上の3式をマトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \\ d\Delta\gamma \\ d\rho \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

逆関係を求めると

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \\ d\Delta\gamma \\ d\rho \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & D_{12} & D_{13} \\ \mathbf{D}_{21} & D_{22} & D_{23} \\ \mathbf{D}_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

弾塑性変形時のConsistent接線剛性 $\mathbf{D}^{ep}$ は

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}_{11}$$

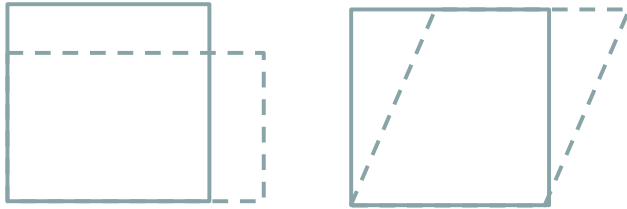
# 解析条件(藤森粘土)

平面ひずみ条件での非排水せん断 ( $p_0=98\text{kPa}$ )

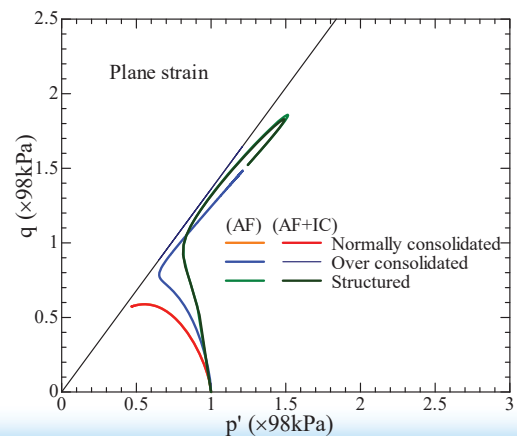
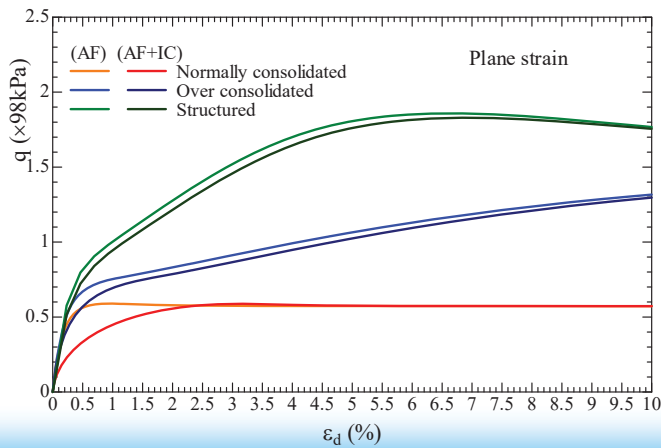
(a) 正規圧密粘土 ( $e_0=0.83$ )

(b) 過圧密粘土 ( $e_0=0.73$ )

(c) 構造化した粘土 ( $e_0=0.73, Q_0=10.0(\omega_0=1.0)$ )

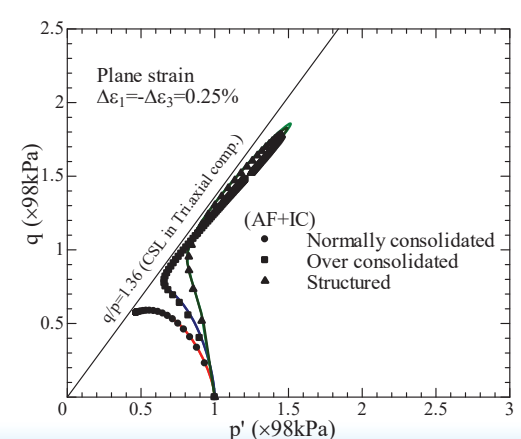
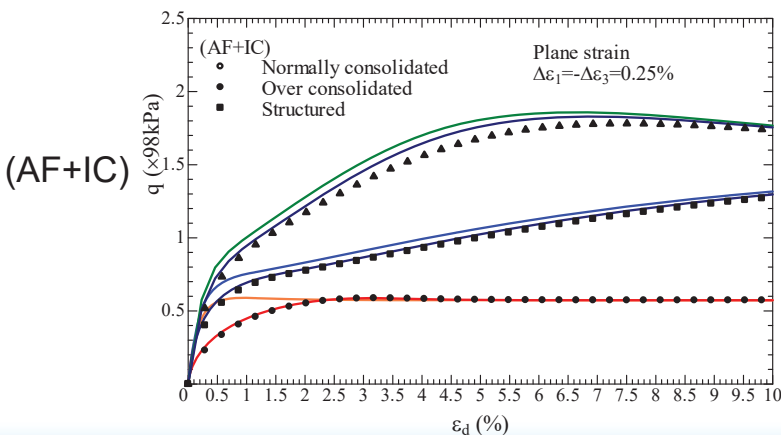
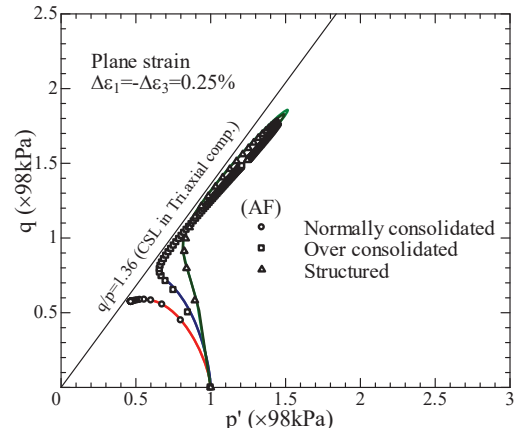
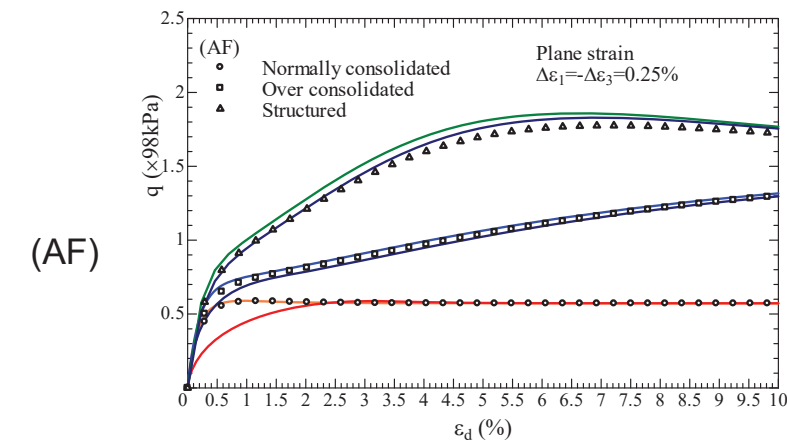


$\lambda$	0.104	Same parameters as Cam clay model
$\kappa$	0.010	
$e_{NC}$ at $p=98\text{ kPa}$ & $q=0\text{ kPa}$	0.83	
$R_{cs} = (\sigma'_1/\sigma'_3)_{cs(comp)}$	3.5	
$v_e$	0.2	Shape of yield surface
$\beta$	1.5	
$a$	100	Influence of density and confining pressure
$k_a$	8	
$b$	10	Influence of bonding
$k_b$	3	



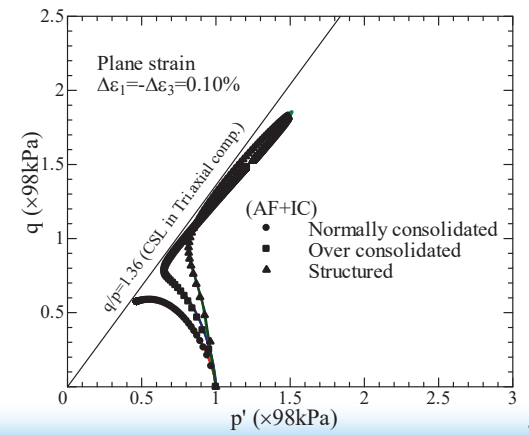
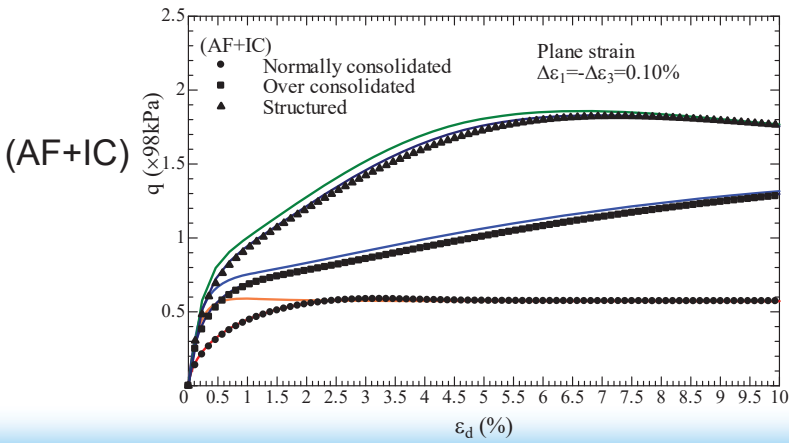
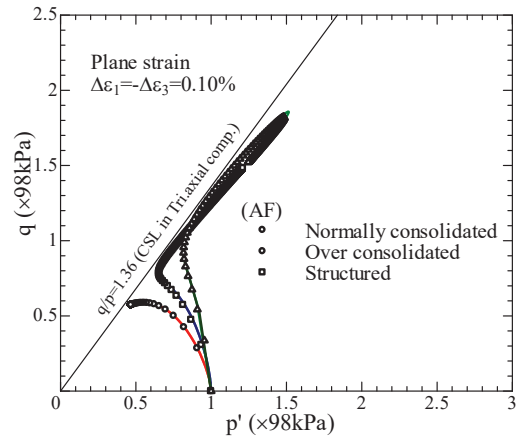
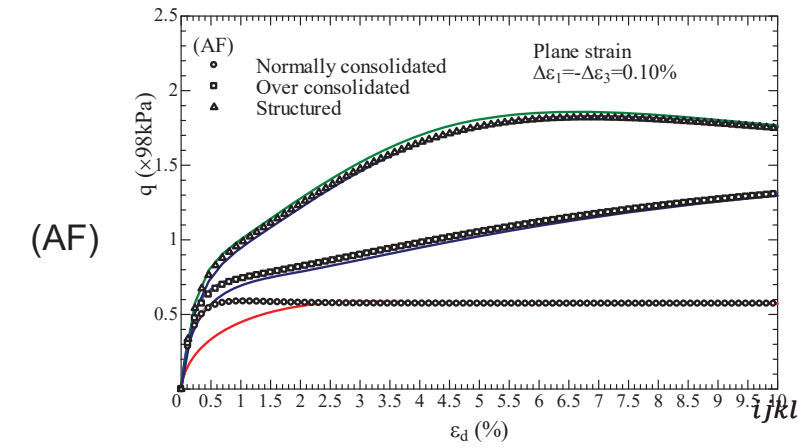
35

# 解析結果( $\Delta\varepsilon_1=0.25\%$ )



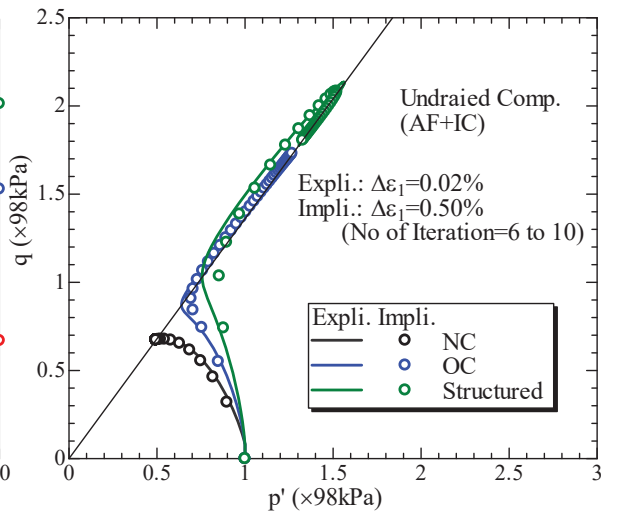
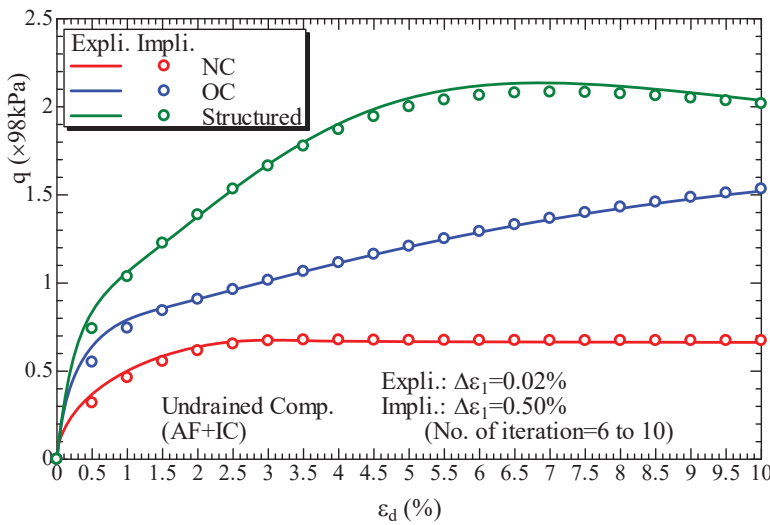
36

# 解析結果( $\Delta\varepsilon_1=0.10\%$ )



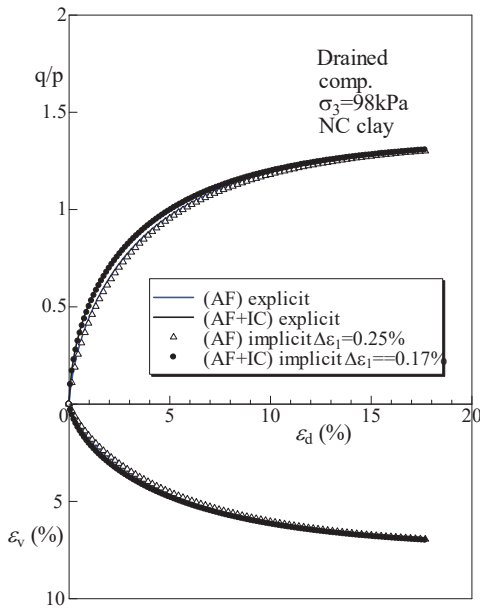
37

# 非排水三軸圧縮試験の陽解法および陰解法の解析

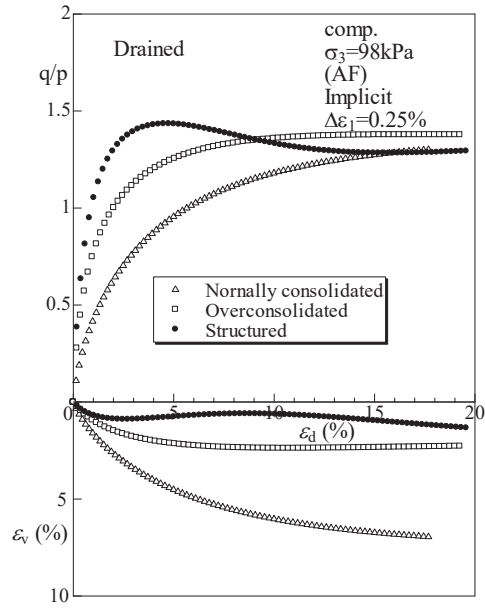


38

# Consistent接線係数のcheck ( $\sigma_3=98\text{kPa}$ )

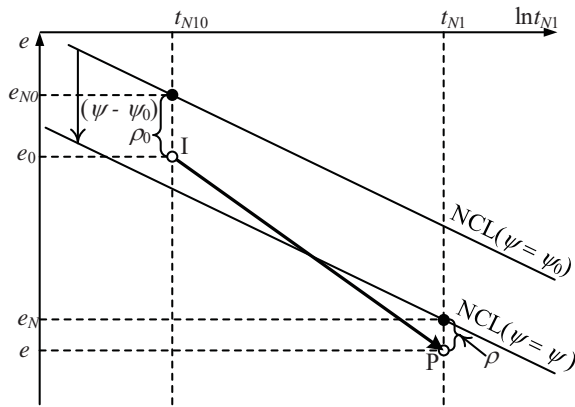


正規圧密土の陽解法と陰解法による計算結果の比較



正規圧密土・過圧密土・自然堆積土の陰解法による計算結果

# 時間効果特性を考慮したモデルへの拡張(1)

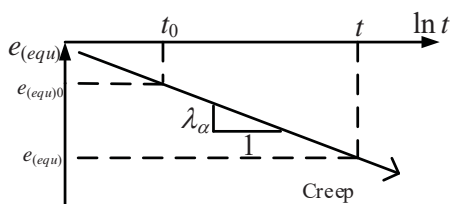


初期状態(I点)および現状態(P点)における間隙比と  $\rho, \psi$  の関係

$$\begin{aligned} (-\Delta e)^p &= (e_0 - e) - (-\Delta e)^e \\ &= \{(e_{N0} - e_N) - (-\Delta e)^e\} - (\rho_0 - \rho) \\ &= \left\{ (\lambda - \kappa) \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} + (\psi - \psi_0) \right\} - (\rho_0 - \rho) \end{aligned}$$

$$f = F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} \{ (\rho_0 - \rho) + (\psi_0 - \psi) \} = 0$$

$$\begin{cases} F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), & \zeta(X) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{X}{M^*} \right)^\beta \\ \text{(where } X = t_s/t_N \text{)} \\ H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p \end{cases}$$



正規圧密土のCreep特性

$$\begin{cases} \psi = \lambda_\alpha \ln t \\ \psi_0 = \lambda_\alpha \ln t_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi = -\lambda_\alpha \ln(-\dot{e})_{(equ)}^p \\ \psi_0 = -\lambda_\alpha \ln(-\dot{e})_{(equ)0}^p \end{cases}$$

$$\begin{cases} \because \psi - \psi_0 = e_{(equ)0} - e_{(equ)} = \lambda_\alpha \ln(t/t_0) \\ \dot{\psi} = -\dot{e}_{(equ)} = \lambda_\alpha / t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} (-\dot{e})_{(equ)}^p &= \sqrt{3}(1 + e_0) \|\dot{\varepsilon}_{ij}^p\| = \sqrt{3}(1 + e_0) \|d\varepsilon_{ij}^p\|/dt \\ \text{(等方圧縮時に } (-\dot{e})_{(equ)}^p &= (-\dot{e})^p \text{となる)} \end{aligned}$$

## 時間効果特性を考慮したモデルへの拡張(2)

$\psi$  および  $\boldsymbol{\varepsilon}^e, \Delta\gamma, \rho$  による微分は次式で表せる

$$\begin{aligned}\psi &= -\lambda_\alpha \ln(-\dot{e})_{(equ)}^p \\ &= -\lambda_\alpha \ln \left\{ \sqrt{3}(1+e_0) \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \cdot \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \right\} = -\lambda_\alpha \ln \left\{ \sqrt{3}(1+e_0) \|\mathbf{N}\| \cdot \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \right\} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} &= -\lambda_\alpha \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} \frac{\partial \|\mathbf{N}\|}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \Delta\gamma} = -\lambda_\alpha \frac{1}{\Delta\gamma}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0\end{aligned}$$

$$\left[ \begin{aligned} \bullet b_1 &= \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} + \Delta\gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \frac{\mathbf{N}}{\text{tr}\mathbf{N}} + L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \mathbf{N}^{(IC)} = 0 \\ \bullet b_2 &= \rho - \rho_n - \Delta\gamma \left\{ -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{a\rho^{1/p}/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\} = 0 \\ \bullet b_3 &= \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n}^p + \Delta\gamma \text{tr}\mathbf{N} \right\} - \frac{1}{\lambda - \kappa} \left\{ (\rho_0 - \rho) + (\psi_0 - \psi) \right\} = 0 \\ \bullet b_4 &= \psi - \psi_n - \Delta\psi = 0 \end{aligned} \right.$$

縮約して

$$\left[ \begin{aligned} \bullet b_1 &= \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(trial)} + \Delta\gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \frac{\mathbf{N}}{\text{tr}\mathbf{N}} + L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \mathbf{N}^{(IC)} = 0 \\ \bullet b_2 &= \rho - \rho_n - \Delta\gamma \left\{ -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{a\rho^{1/p}/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\} + \psi - \psi_n - \Delta\psi = 0 \\ \bullet b_3 &= \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n}^p + \Delta\gamma \text{tr}\mathbf{N} \right\} - \frac{1}{\lambda - \kappa} \left\{ (\rho_0 - \rho) + (\psi_0 - \psi) \right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

41

## 時間効果特性を考慮したモデルへの拡張(3)

$$d\psi = -\lambda_\alpha \frac{1}{(-\dot{e})_{(equ)}^p} d(-\dot{e})_{(equ)}^p$$

$$\Delta\psi = -\lambda_\alpha \frac{1}{(1-b)(-\dot{e})_{(equ),n}^p + b(-\dot{e})_{(equ)}^p} \left\{ (-\dot{e})_{(equ)}^p - (-\dot{e})_{(equ),n}^p \right\} \quad (\text{where } 0 \leq b \leq 1, \text{ usually } b = 0.5)$$

$$= -\lambda_\alpha \frac{R-1}{1-b+bR} \quad \text{where } R = \frac{(-\dot{e})_{(equ)}^p}{(-\dot{e})_{(equ),n}^p} = \frac{\sqrt{3}(1+e_0)\|\mathbf{N}\|\Delta\gamma}{(-\dot{e})_{(equ),n}^p \Delta t}$$

$$\left[ \begin{aligned} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} &= -\lambda_\alpha \frac{1}{(1-b+bR)^2} \frac{\sqrt{3}(1+e_0)\Delta\gamma}{(-\dot{e})_{(equ),n}^p \Delta t} \frac{\partial \|\mathbf{N}\|}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \\ \frac{\partial \Delta\psi}{\partial \Delta\gamma} &= -\lambda_\alpha \frac{1}{(1-b+bR)^2} \frac{\sqrt{3}(1+e_0)\|\mathbf{N}\|}{(-\dot{e})_{(equ),n}^p \Delta t} \\ \frac{\partial \Delta\psi}{\partial \rho} &= 0 \end{aligned} \right.$$

弾塑性、弾性状態に拘わらず現応力状態は常に降伏曲面上にあるので  $\rho$  は NCL のシフトを考慮して

$$f = F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} \left\{ (\rho_0 - \rho) + (\psi_0 - \psi) \right\} = 0 \quad \left( \text{where } F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), \quad H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \boldsymbol{\varepsilon}_v^p \right)$$



$$\rho = \rho_0 - (\lambda - \kappa) \ln(t_{N1}/t_{N0}) + \boldsymbol{\varepsilon}_v^p (1+e_0) + (\psi_0 - \psi)$$

42

# 等方圧縮時の時間効果特性の解析(正規圧密土)

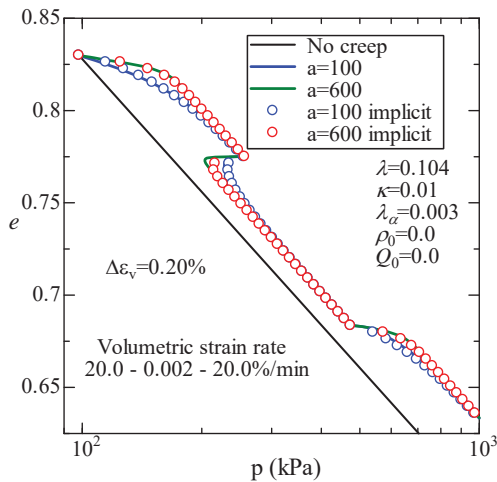
## 正規圧密粘土の定ひずみ圧縮試験およびクリープ試験の解析

時間効果特性に関する材料パラメータ

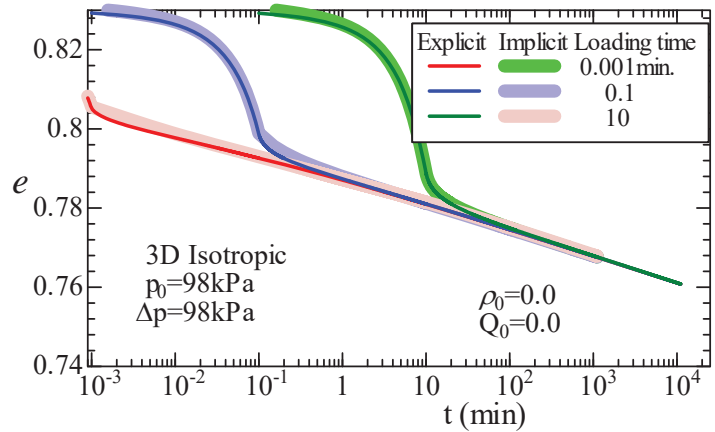
2次圧密係数  $\lambda_\alpha = 0.003$

初期条件(換算間隙比の塑性変化速度)

$(-\dot{e})_{(equ)0}^p = (-\dot{e})_{(equ)ref}^p = 1 \times 10^{-7} \text{ \%}/\text{min}$



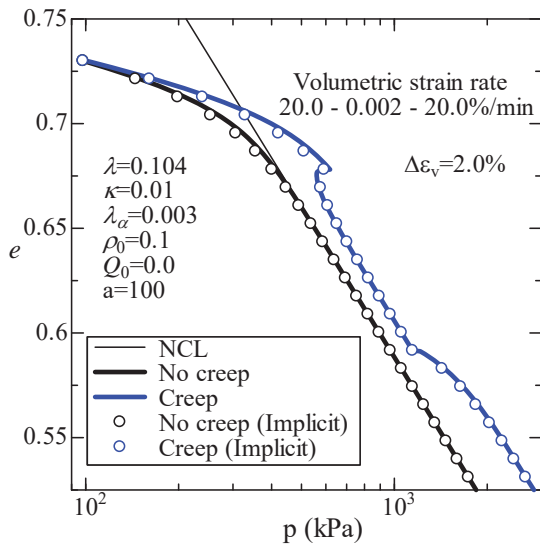
ひずみ速度を変えた定ひずみ速度試験



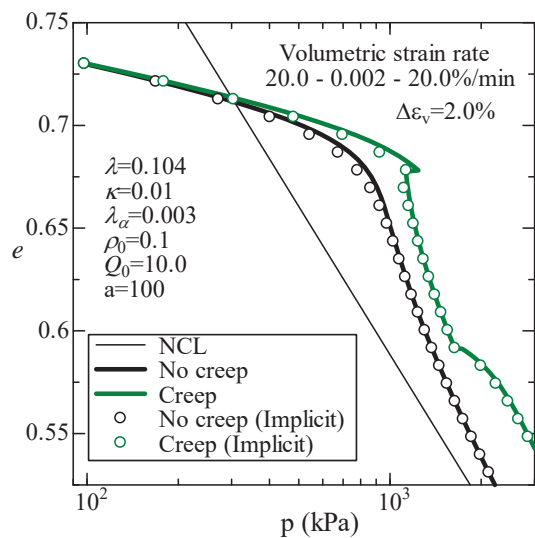
等方圧縮後のクリープ試験

# 等方圧縮時の時間効果特性の解析(過圧密土、自然堆積土)

## ひずみ速度を変えた定ひずみ速度試験



過圧密土



自然堆積土

# せん断時の時間効果特性の解析(正規圧密土)

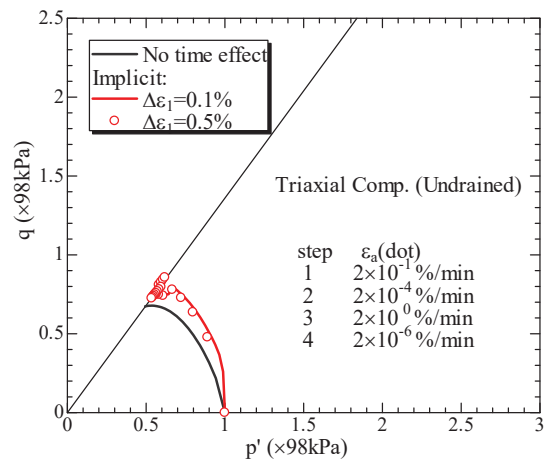
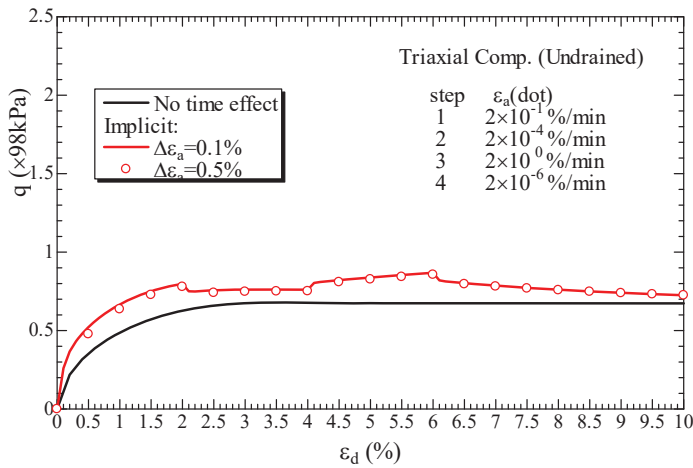
## ひずみ速度を段階的に変えた非排水三軸圧縮試験の解析

時間効果特性に関する材料パラメータ

$$2 \text{ 次圧密係数 } \lambda_{\alpha} = 0.003$$

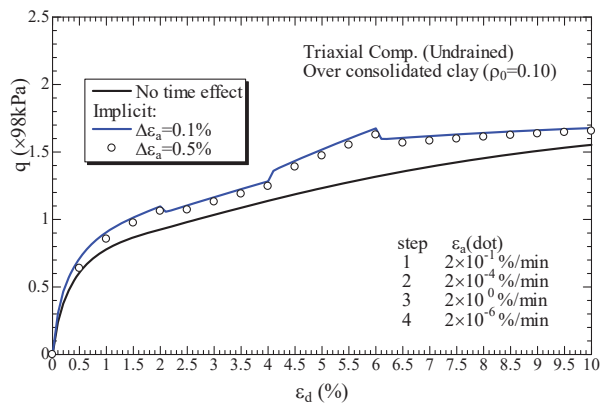
初期条件(換算間隙比の塑性変化速度)

$$(-\dot{\epsilon})_{(equ)0}^p = (-\dot{\epsilon})_{(equ)ref}^p = 1 \times 10^{-7} \%/\text{min}$$

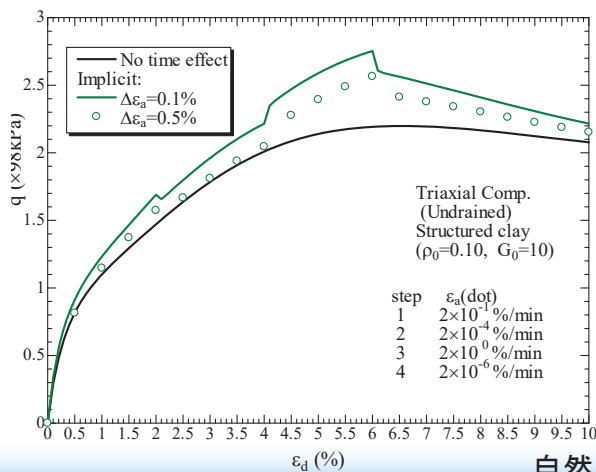
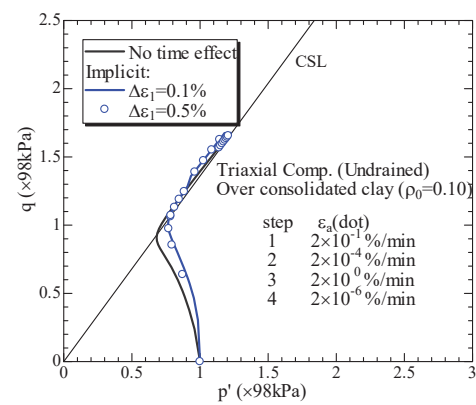


45

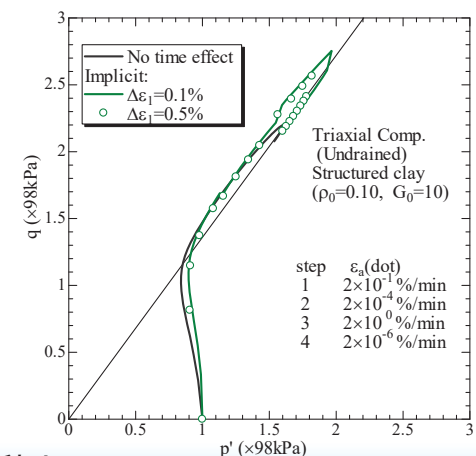
# せん断時の時間効果特性の解析(過圧密土、自然堆積土)



過圧密土



自然堆積土



46



## 参考文献

- 1) 石川明・寺田健二郎・京谷孝史・社本康広(2010):非線形弾性構成則を用いた複合地盤のマルチスケール解析、土木学会論文集(C), **66**(1), 145-155
- 2) Nakai T. and Hinokio M. (2004): A simple elastoplastic model for normally and over consolidated soils with unified material parameters, *Soils and Foundations*, **44**(2), 53-70
- 3) Nakai T., Shahin H.M., Kikumoto M., Kyokawa H., Zhang F. and Farias, M.M. (2011): A simple and unified three-dimensional model to describe various characteristics of soils, *Soils and Foundations*, **51**(6), 1149-1168.
- 4) Nakai T. (2012): *Constitutive Modeling of Geomaterials: Principles and Applications* (376pages), CRC Press, Boca Raton/London/New York
- 5) 中井照夫・Shahin H.M.・石川明(2018): 引張り応力の発生しない地盤材料の弾性式, 第53回地盤工学研究発表会, 369-370.
- 6) 中井照夫・Shahin H.M. (2019): Subloading tij model の陰解法計算アルゴリズム, 第54回地盤工学研究発表会, 369-370
- 7) 中井照夫・Shahin H.M.・高橋寛臣・戸田圭彦(2020): Subloading tij model の陰解法計算アルゴリズム(その2), 第75回土木学会年次講演会
- 8) Nakai・Shahin・Ishikawa(2019): Rational modeling of elastic behavior in 3D condition, *Proc. of IS-Glasgow*, Glasgow
- 9) Miehe C (1998): Comparison of two algorithm for the computation of fourth-order isotropic tensor functions, *Computer and Structure*, **66**(1), 37-43.
- 10)Ogden R.W (1983): *Non-Linear Elastic Deformations*, (532pages), Dover Publications, New York
- 11)Simo J.C., Hughes T.J.R. (1998): *Computational Inelasticity*, (392 pages), Springer.
- 12)Souza *et.al.*;寺田他訳,(2008; 2012): *Computational Methods for plasticity; 非線形有限要素法*, John Wiley & Sons; 森北出版

Webによる地盤材料の構成モデル講習会を終えるにあたって



# 地盤材料のモデルで考慮すべき特性

(1) 中間主応力が変形・強度特性におよぼす影響

(2) 引張り応力の発生しない構成モデル

(3) 変形・強度特性におよぼす間隙比や拘束応力の影響  
「過圧密土」

(4) 自然堆積粘土等に見られる構造の発達した土の挙動  
「自然堆積土」

(5) ひずみ増分方向におよぼす応力増分方向の影響

(6) 時間効果特性すなわちレオロジー特性

(7) 液状化を含む繰返し载荷特性(応力誘導異方性)

(8) 固有異方性

$t_{ij}$  の概念

下負荷面の考え方とその拡張(密度とボンディングを考慮)

パラメータを増やさず塑性ひずみ増分の分割

正規圧密線(NCL)のシフトと下負荷面

## Modelの基本式

(1) 降伏関数

$$\bullet f = F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} F &= \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), \quad \zeta(X) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{X}{M^*} \right)^\beta \\ &\quad (\text{where } X = t_s / t_N) \\ H &= \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p \end{aligned} \right.$$

(2) 塑性ひずみ増分

$$\bullet d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \frac{\partial t_{ij}}{\partial F} + L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \frac{\delta_{ij}}{3}$$

(3) 硬化パラメータの増分

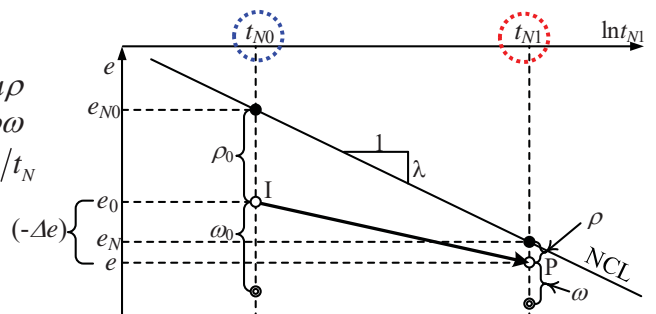
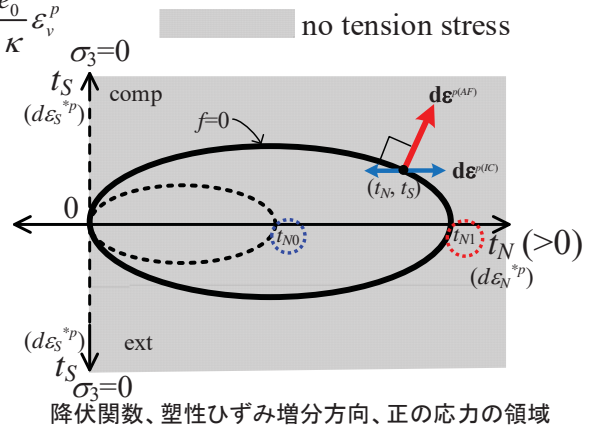
$$\bullet d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_{kk}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_{kk}}$$

(4) 密度の状態変数  $\rho$  の発展則

$$\bullet d\rho = -(1 + e_0) \sqrt{3} \frac{G/(1 + k_a X) + Q/(1 + k_b X)}{t_N} \Lambda \quad \left\{ \begin{aligned} G &= a\rho \\ Q &= b\omega \\ X &= t_s / t_N \end{aligned} \right.$$

(5) ボンディングの状態変数  $\omega$  の発展則

$$\bullet d\omega = -(1 + e_0) \sqrt{3} Q \left\| d\varepsilon_{ij}^p \right\| = -(1 + e_0) \sqrt{3} Q \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Lambda$$



初期および現応力状態と間隙比の関係