

弾塑性論の基本

tij地盤解析研究所
(株)地域地盤環境研究所
中部大学
元名古屋工業大学

中井照夫



1

講習会を始めるにあたって

2

はじめに

過去

現在

将来

Terzaghi型(1948年型)

一般材料力学としての地盤力学

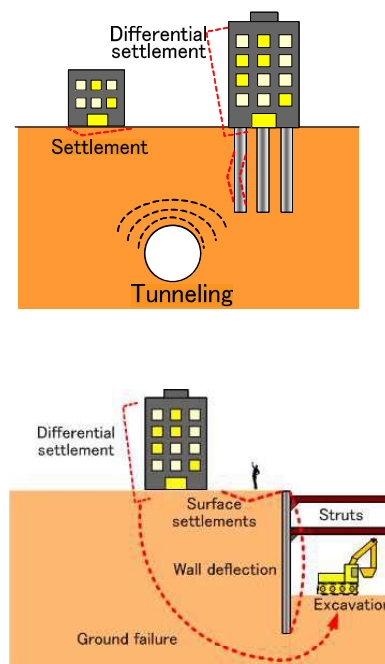
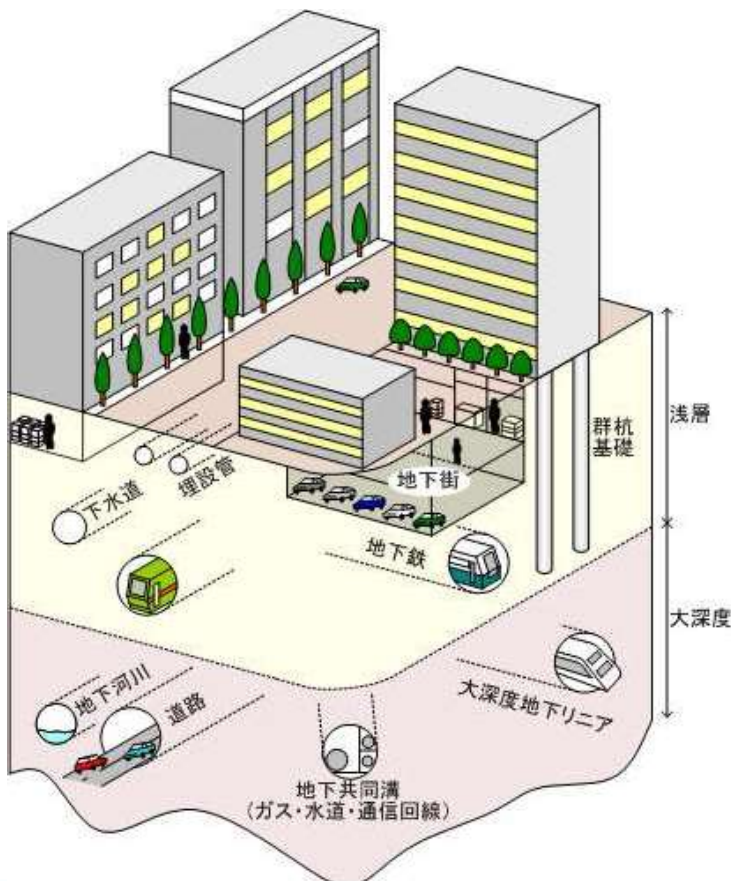
1. 透水
壊れない剛体
2. 圧密
沈下量: 1次元非線形弾塑性体
速さ: 1次元線形弾性体
3. せん断
変形: ダイレイタンスー
強度: 排水・非排水強度(c, ϕ)
4. 地盤内応力
線形弾性体
5. 安定解析
剛塑性体(c, ϕ)

いろいろな問題を通常の力学(連続体力学)の範疇で同じ考え方で説明する。そこで必要とされるのは、

1. つり合い式(運動方程式)
2. 変位の適合条件(連続式)
3. 有効応力式
4. 土・水・(空気)連成問題
5. 境界値問題の数値解析法
6. 材料の特性式(構成式)
非線形弾塑性材料

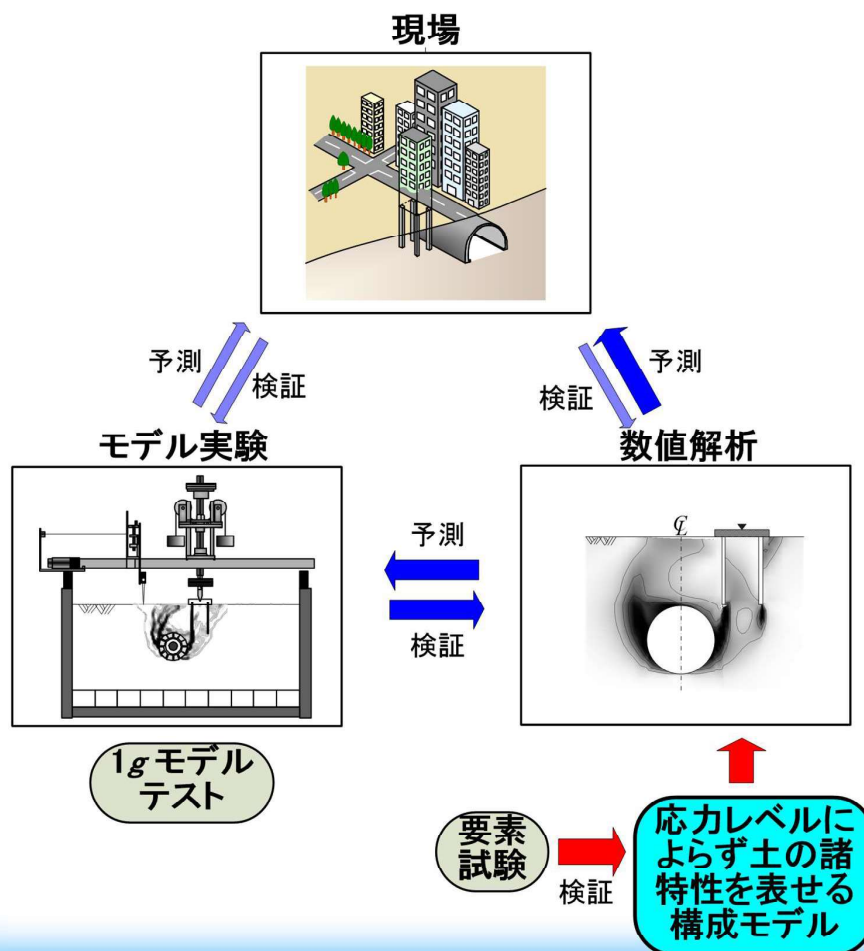
3

例として都市における地盤工学



4

地盤工学における地盤の変形・破壊予測



5

地盤力学における3つのモデリング

- Constitutive Modeling
(構成モデル+要素試験)
- Numerical Modeling
(数値解析)
- Physical Modeling
(モデル実験)

6

内容

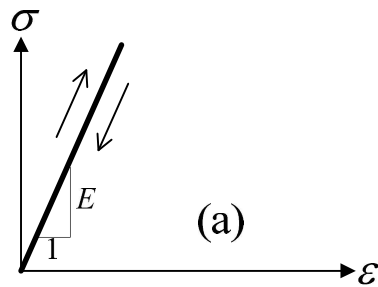
1. 弾塑性論の基本
 - 1次元の弾性および弾塑性論
 - 多次元の弾性および弾塑性論
2. 地盤材料の1次元挙動とモデル化
 - 正規圧密土
 - 過圧密土
 - 自然堆積土
 - 正規圧密土から自然堆積土までの時間効果特性
3. 地盤材料の通常の多次元モデル
 - 正規圧密土から過圧密土までのせん断挙動
 - 弾・完全塑性モデル (Drucker-Prager model, Mohr-Coulomb model)
 - Cam clay model
4. t_{ij} の概念とそれに基づく正規圧密土のモデル化 (t_{ij} clay model)
 - t_{ij} の概念の意味
 - t_{ij} の概念に基づく正規圧密土のモデル化
5. t_{ij} の概念に基づく過圧密土から自然堆積土までのモデル化 (Subloading t_{ij} model)
 - 過圧密土
 - 自然堆積土
 - 正規圧密土から自然堆積土までの時間効果特性
6. 陰解法によるモデルの定式化
 - 引張り応力のでない弾性式
 - Return Mapping
7. 繰返し載荷特性のモデル化他

7

1次元の弾性および弾塑性論

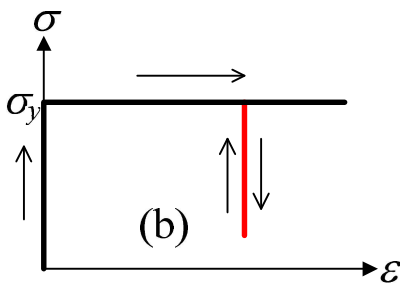
典型的な固体の1次元挙動(1)

線形弾性体



$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad \text{or} \quad d\varepsilon = d\varepsilon^e = \frac{1}{E} d\sigma \quad (E: \text{elastic modulus})$$

剛塑性体

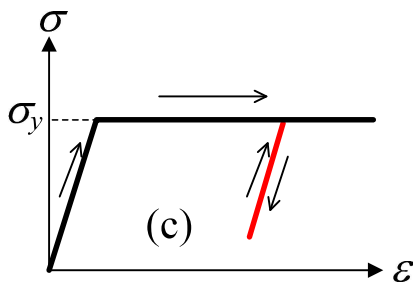


$$\begin{cases} d\varepsilon = d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{h^p} = \infty & \text{if } f = \sigma - \sigma_y = 0 \quad \& \quad df = 0 \\ d\varepsilon = 0 & \text{if } f = \sigma - \sigma_y < 0 \quad \text{or} \quad df < 0 \end{cases}$$

9

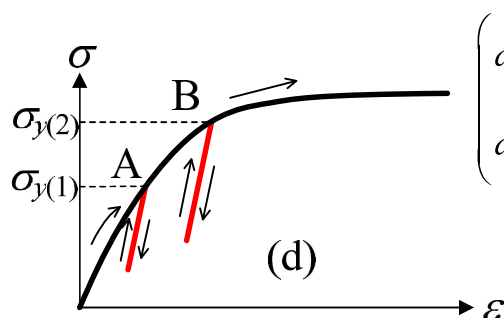
典型的な固体の1次元挙動(2)

弾・完全塑性体



$$\begin{cases} d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \frac{1}{E} d\sigma + \frac{d\sigma}{h^p} = \infty & \text{if } f = \sigma - \sigma_y = 0 \quad \& \quad df = 0 \\ d\varepsilon = d\varepsilon^e = \frac{1}{E} d\sigma & \text{if } f = \sigma - \sigma_y < 0 \quad \text{or} \quad df < 0 \end{cases}$$

ひずみ硬化弾塑性体



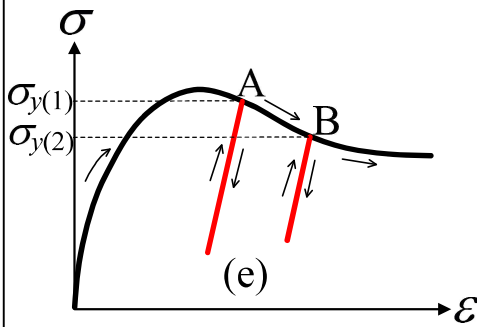
$$\begin{cases} d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \frac{1}{E} d\sigma + \frac{d\sigma}{h^p} & \text{if } f = \sigma - \sigma_y = 0 \quad \& \quad df \geq 0 \\ d\varepsilon = d\varepsilon^e = \frac{1}{E} d\sigma & \text{if } f = \sigma - \sigma_y < 0 \quad \text{or} \quad df < 0 \end{cases}$$

後続負荷条件 $\sigma = \sigma_y$ (or $f=0$) より

$$d\sigma = d\sigma_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon^p} d\varepsilon^p = h^p d\varepsilon^p \quad 10$$

典型的な固体の1次元挙動(3)

ひずみ硬化軟化弾塑性体

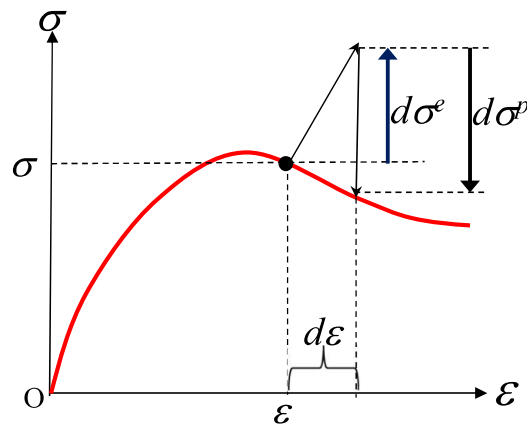


増分形構成モデルは(d)と同じ

負荷基準:

$$\begin{cases} d\varepsilon^p \neq 0 & \text{if } f = \sigma - \sigma_y = 0 \quad \& \quad d\varepsilon^p > 0 \\ d\varepsilon^p = 0 & \text{if } f = \sigma - \sigma_y < 0 \quad \text{or } d\varepsilon^p \leq 0 \end{cases}$$

応力・ひずみ関係のexplicitな表現と負荷基準



$$\begin{cases} d\sigma = d\sigma^e - d\sigma^p \\ d\sigma^e = E \cdot d\varepsilon \\ d\sigma^p = \frac{E^2}{E + h^p} d\varepsilon \end{cases}$$

$$\square d\sigma = E \cdot d\varepsilon^e = E \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon^p)$$

$$\square f = \sigma - \sigma_y(\varepsilon^p) = 0$$

↓ (後続負荷条件)

$$df = d\sigma - \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon^p} d\varepsilon^p = d\sigma - h^p d\varepsilon^p = 0$$

$$\longrightarrow E \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon^p) = h^p \cdot d\varepsilon^p$$

↓

$$d\varepsilon^p = \frac{E}{E + h^p} d\varepsilon = \frac{d\sigma^e}{E + h^p}$$

$$d\sigma = E \left(1 - \frac{E}{E + h^p} \right) d\varepsilon = D^{ep} \cdot d\varepsilon$$

$E + h^p$ は通常正なので、 $d\sigma^p$ の正負の代わりに $d\sigma^e$ の正負で負荷の判定をしてもよい。

1次元弾塑性構成式より一般的な表現

- 降伏関数

$$f = F(\sigma) - H(\varepsilon^p) = 0$$

- 後続負荷条件($df=0$)から

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon^p} d\varepsilon^p$$



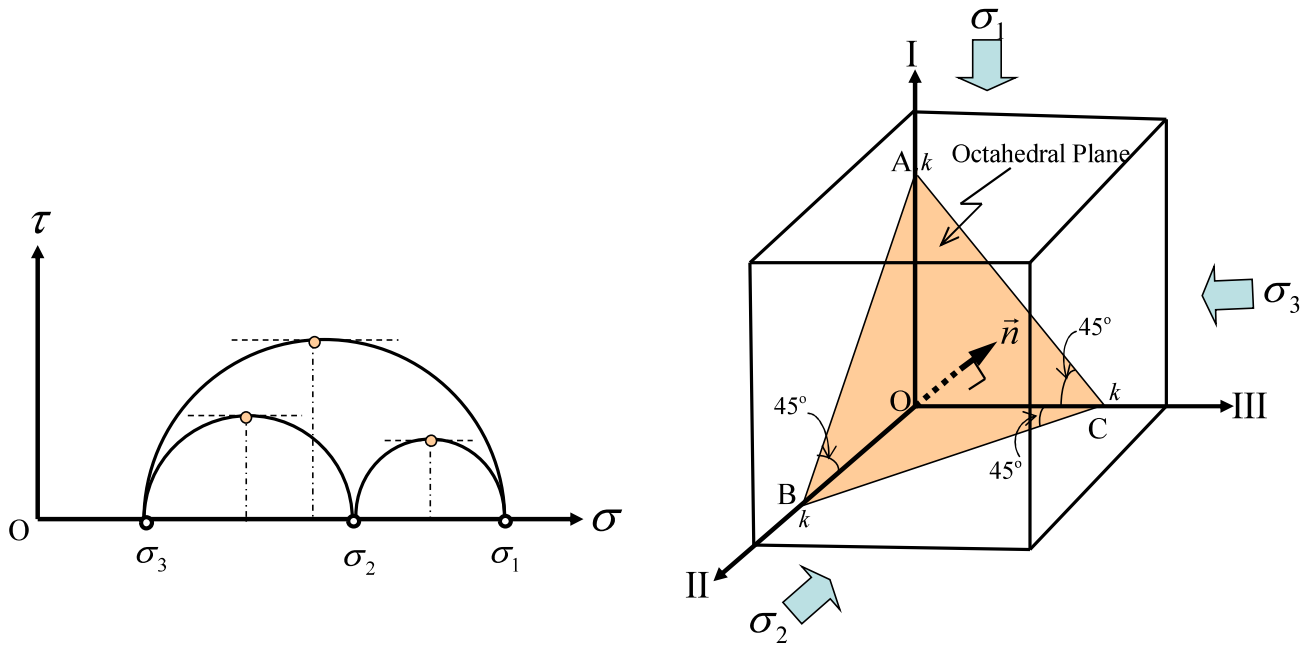
増分形構成式

$$\begin{cases} d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \frac{1}{E} d\sigma + \frac{dF}{\partial H / \partial \varepsilon^p} & \text{if } f = F - H = 0 \quad \& \quad d\varepsilon^p > 0 \\ d\varepsilon = d\varepsilon^e = \frac{1}{E} d\sigma & \text{if } f = F - H < 0 \quad \text{or } d\varepsilon^p \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f + df &= F(\sigma + d\sigma) - H(\varepsilon^p + d\varepsilon^p) \\ &\cong F(\sigma) + \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma - \left(H(\varepsilon^p) + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon^p} d\varepsilon^p \right) = 0 \\ &\quad \downarrow \\ df &= dF - dH = 0 \end{aligned}$$

多次元の弾性および弾塑性論

3次元応力状態と正八面体面(1)



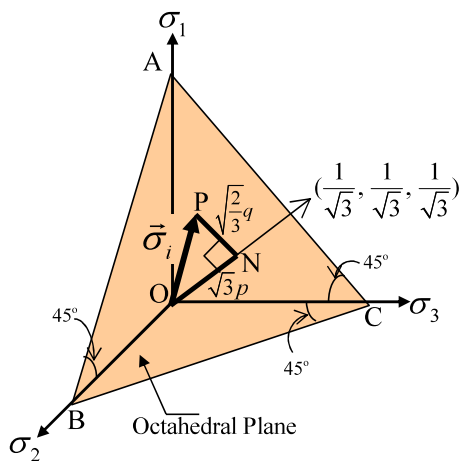
正八面体面の法線方向の単位ベクトル

$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

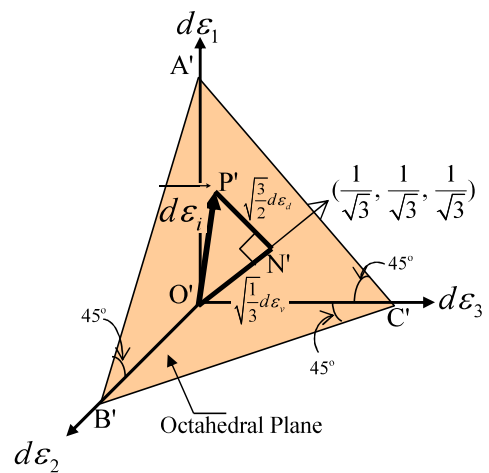
15

3次元応力状態と正八面体面(2)

応力パラメータ



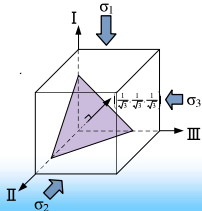
ひずみ増分パラメータ



$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{1}{3}} \overline{ON} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ q = \sqrt{\frac{3}{2}} \overline{NP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\varepsilon_v = \sqrt{3} \overline{O'N'} = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 \\ d\varepsilon_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \overline{O'P'} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2} \end{cases}$$

正八面体面上の応力およびひずみ増分との関係



$$\begin{cases} \sigma_{oct} = \sigma_m = p \\ \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} q \end{cases} \quad \begin{cases} d\varepsilon_{oct} = \frac{d\varepsilon_v}{3} \\ \frac{d\gamma_{oct}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} d\varepsilon_d \end{cases}$$

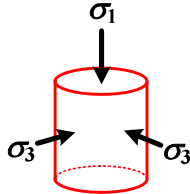
16

3次元応力状態と正八面体面(2)

ひずみパラメータ

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} = \varepsilon_{kk} \quad \varepsilon_d^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p)^2 + (\varepsilon_3^p - \varepsilon_1^p)^2}$$

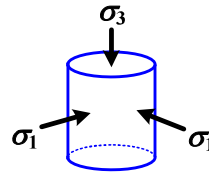
三軸圧縮および伸張条件下の応力・ひずみ増分パラメータ



Comp.

under triaxial compression

$$\begin{cases} p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}, & q = \sigma_1 - \sigma_3 \\ d\varepsilon_v = d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_2, & d\varepsilon_d = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \\ \varepsilon_v^p = \varepsilon_1^p + 2\varepsilon_3^p, & \varepsilon_d^p = \frac{2}{3}(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p) \end{cases}$$



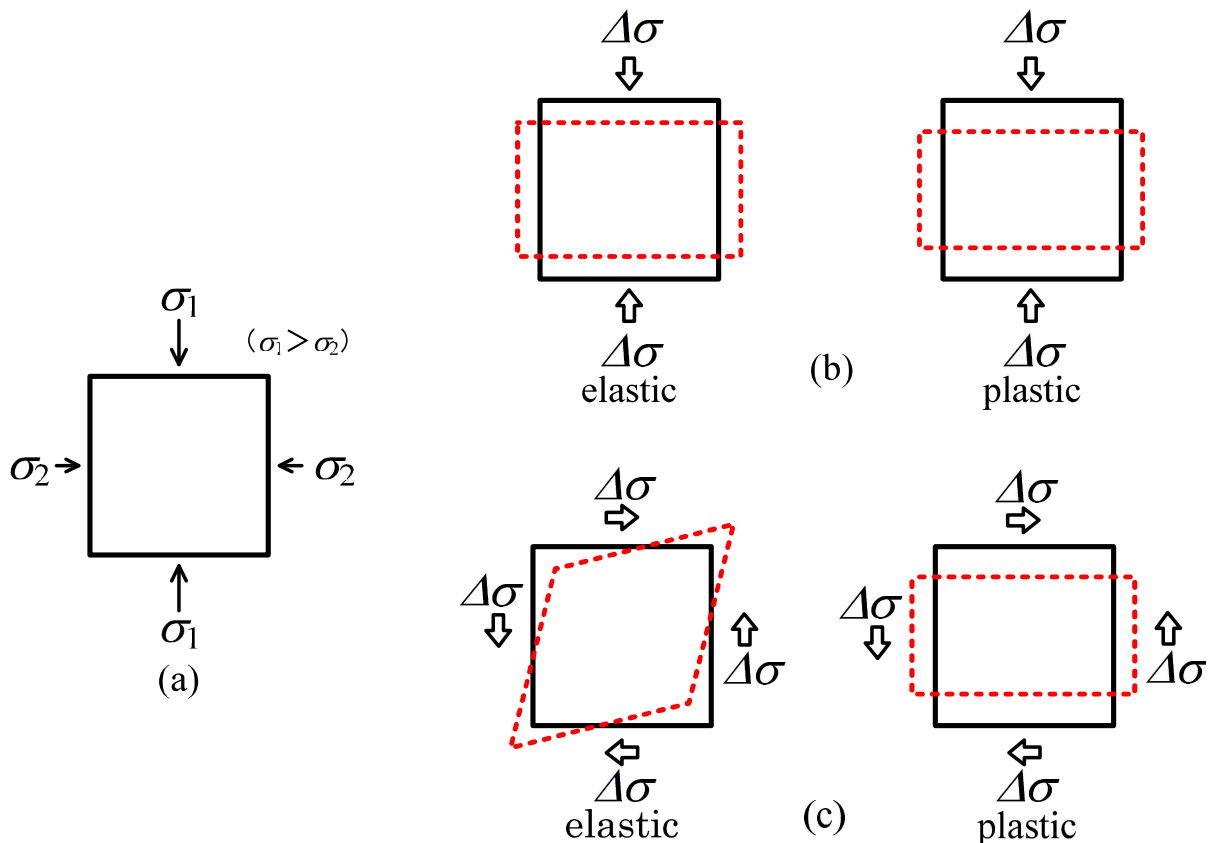
Ext.

under triaxial extension

$$\begin{cases} p = \frac{2\sigma_1 + \sigma_3}{3}, & q = \sigma_1 - \sigma_3 \\ d\varepsilon_v = 2d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2, & d\varepsilon_d = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \\ \varepsilon_v^p = 2\varepsilon_1^p + \varepsilon_3^p, & \varepsilon_d^p = \frac{2}{3}(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p) \end{cases}$$

17

多次元での弾性挙動と塑性挙動

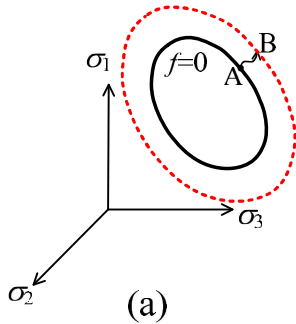


18

多次元での弾塑性モデルの定式化(1)

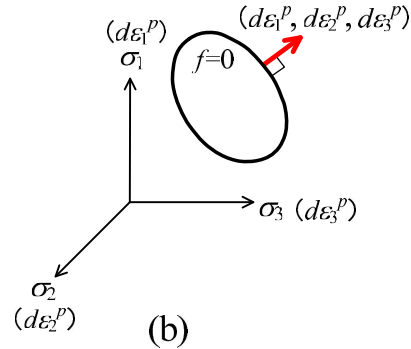
・降伏関数

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{in general form} \\ f = F(\sigma_{ij}) - H(\varepsilon_{ij}^p) = 0 \\ \text{in isotropic material} \\ f = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - H(\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p) = 0 \end{array} \right.$$



後続負荷条件 $f=0$ より

$$df = 0 \quad \text{or} \quad dF = dH$$



直交則より

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{in general form} \\ d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\Lambda : \text{positive scalar}) \\ \text{in isotropic material} \\ d\varepsilon_1^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_1}, \quad d\varepsilon_2^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_2}, \quad d\varepsilon_3^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} \end{array} \right. \quad 19$$

多次元での弾塑性モデルの定式化(2)

先の2式(降伏関数、直行則)より

$$df = dF - dH = dF - \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1^p} d\varepsilon_1^p + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_2^p} d\varepsilon_2^p + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_3^p} d\varepsilon_3^p \right)$$

$$= dF - \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_2^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_3^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} \right) \cdot \Lambda = 0$$

$$\left[= dF - \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \Lambda = 0 \right]$$



$$\Lambda = \frac{dF}{\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_2^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_3^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}} = \frac{dF}{h^p}$$

$$\left[= \frac{dF}{\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}} = \frac{dF}{h^p} \right]$$

where

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} d\sigma_3 \quad \left(= \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \right)$$

増分形構成式

$$\left\{ \begin{array}{ll} d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p & \text{if } f = F - H = 0 \quad \& \quad \Lambda > 0 \\ d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e & \text{if } f = F - H < 0 \quad \text{or } \Lambda \leq 0 \end{array} \right.$$

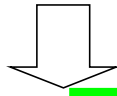
where

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

3次元等方弾性式

$$\begin{cases} \varepsilon_I = \frac{1}{E}\sigma_I + \left(-\frac{\nu}{E}\right)\sigma_{II} + \left(-\frac{\nu}{E}\right)\sigma_{III} \\ \varepsilon_{II} = \left(-\frac{\nu}{E}\right)\sigma_I + \frac{1}{E}\sigma_{II} + \left(-\frac{\nu}{E}\right)\sigma_{III} \\ \varepsilon_{III} = \left(-\frac{\nu}{E}\right)\sigma_I + \left(-\frac{\nu}{E}\right)\sigma_{II} + \frac{1}{E}\sigma_{III} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varepsilon_v = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \cdot \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{K} \cdot p \\ \varepsilon_I - \varepsilon_{II} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = \frac{1}{G} \cdot \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \\ \varepsilon_{II} - \varepsilon_{III} = \frac{1}{G} \cdot \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}, \quad \varepsilon_{III} - \varepsilon_I = \frac{1}{G} \cdot \frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2} \end{cases}$$

21

増分形Hooke則

等方弾性体(増分形)

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} = \frac{1}{2G} d\sigma_{ij} - \left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}\right) d\sigma_{kk} \delta_{ij}$$

or

$$d\sigma_{ij} = \left(K - \frac{2}{3}G\right) d\varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} + 2Gd\varepsilon_{ij}^e$$

Here,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$d\varepsilon_v^e$: 弾性体積ひずみ増分- 平均応力増分 dp だけで決まる。

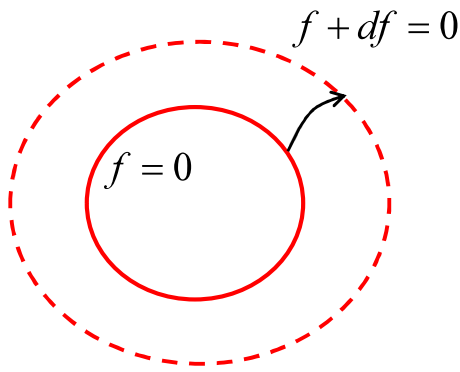
$d\varepsilon'_{ij}$: 弾性偏差ひずみ増分- 偏差応力増分 ds_{ij} だけで決まる。

$$\begin{cases} dp = \frac{d\sigma_{kk}}{3} = Kd\varepsilon_{kk}^e = Kd\varepsilon_v^e \\ ds_{ij} = 2Gd\varepsilon'_{ij} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ds_{ij} = d\sigma_{ij} - \frac{d\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} = d\sigma_{ij} - dp\delta_{ij} \\ d\varepsilon'_{ij} = d\varepsilon_{ij} - \frac{d\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} = d\varepsilon_{ij} - \frac{d\varepsilon_v}{3} \delta_{ij} \end{cases}$$

22

参考資料- 後続負荷条件(適応条件)



$$f = F(\sigma_{ij}) - H(\varepsilon_{ij}^p) = 0$$

$$f + df = F(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) - \left(H + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p \right)$$

$$\cong F(\sigma_{ij}) + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \left(H + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p \right) = 0$$

$$\therefore df = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p = dF - dH = 0$$

Taylor展開

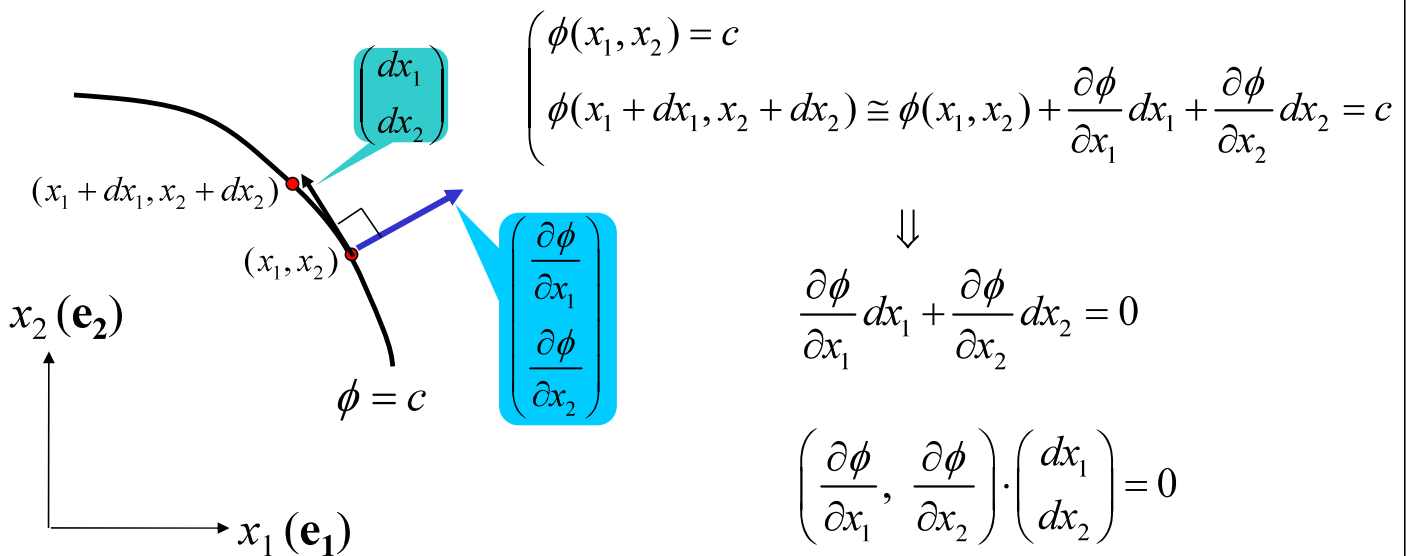
$$f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots)$$

$$= f(x_1, x_2, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots \right\} + \frac{1}{3!} \{ \dots \} + \dots$$

$$\approx f(x_1, x_2, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots$$

23

参考資料- 勾配 (Gradient)

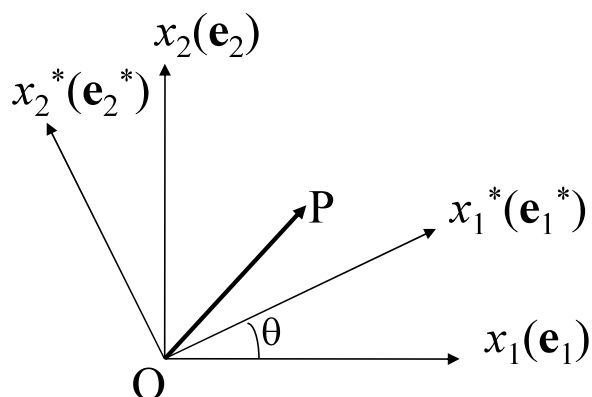


したがって

勾配 $\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)$ はポテンシャル ϕ に直交する方向を表す。

24

参考資料- ベクトル



$$\underline{\mathbf{p}} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta \\ p_2^* &= -p_1 \sin \theta + p_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (2)$$

$$\underline{\mathbf{p}}^* = \mathbf{T} \underline{\mathbf{p}} \quad (\text{vector}) \quad (3)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A^* = A \quad (\text{scalar}) \quad (5)$$

25

参考資料- ベクトルの内積

$$\mathbf{a} = (\sum_i) a_i \mathbf{e}_i = (\sum_i) a_i^* \mathbf{e}_i^*$$

$$\mathbf{b} = (\sum_i) b_i \mathbf{e}_i = (\sum_i) b_i^* \mathbf{e}_i^*$$

$$(\mathbf{ab}) = (\sum_i) a_i \mathbf{e}_i (\sum_j) b_j \mathbf{e}_j$$

$$= (\sum_i \sum_j) a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

$$= (\sum_i \sum_j) a_i b_j \delta_{ij}$$

$$= (\sum_i) a_i b_i$$

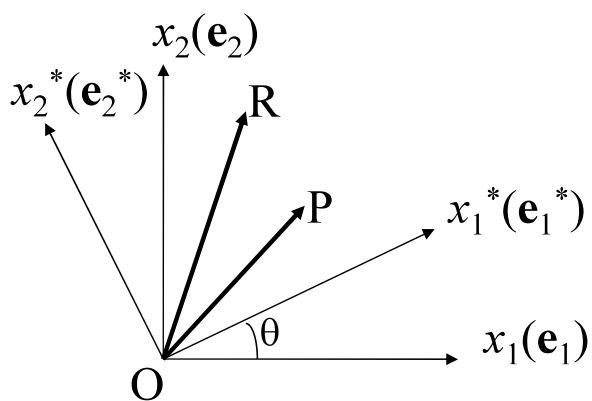
N.B.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\sum_i) a_i \mathbf{e}_i$$

$$(\mathbf{ab}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} = (\mathbf{ba})$$

26

参考資料- テンソル(1)



$$\begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{p}}^* = \mathbf{T} \underline{\mathbf{p}}$$

$$\begin{pmatrix} r_1^* \\ r_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{r}}^* = \mathbf{T} \underline{\mathbf{r}}$$

ここで、ベクトル $\underline{\mathbf{p}}$ に作用してベクトル $\underline{\mathbf{r}}$ を作る行列 \mathbf{Q} を考える。

$$\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{Q} \underline{\mathbf{p}} \quad \underline{\mathbf{r}}^* = \mathbf{Q}^* \underline{\mathbf{p}}^*$$

27

参考資料- テンソル(2)

$$\underline{\mathbf{r}}^* = \mathbf{T} \cdot \underline{\mathbf{r}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \underline{\mathbf{p}}$$

$$\underline{\mathbf{r}}^* = \mathbf{Q}^* \cdot \underline{\mathbf{p}}^* = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \underline{\mathbf{p}}$$

したがって、

$$\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \Rightarrow$$

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}^T$$

のように座標変換される行列 \mathbf{Q} をテンソルと定義する

$$A^* = A \quad (\text{scalar})$$

$$p_i^* = T_{ij} p_j \quad \underline{\mathbf{p}}^* = \mathbf{T} \cdot \underline{\mathbf{p}} \quad (\text{vector})$$

$$Q_{ij}^* = T_{ik} T_{jl} Q_{kl} \quad \underline{\mathbf{Q}}^* = \mathbf{T} \cdot \underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T}^T \quad (\text{tensor : 2nd order})$$

28

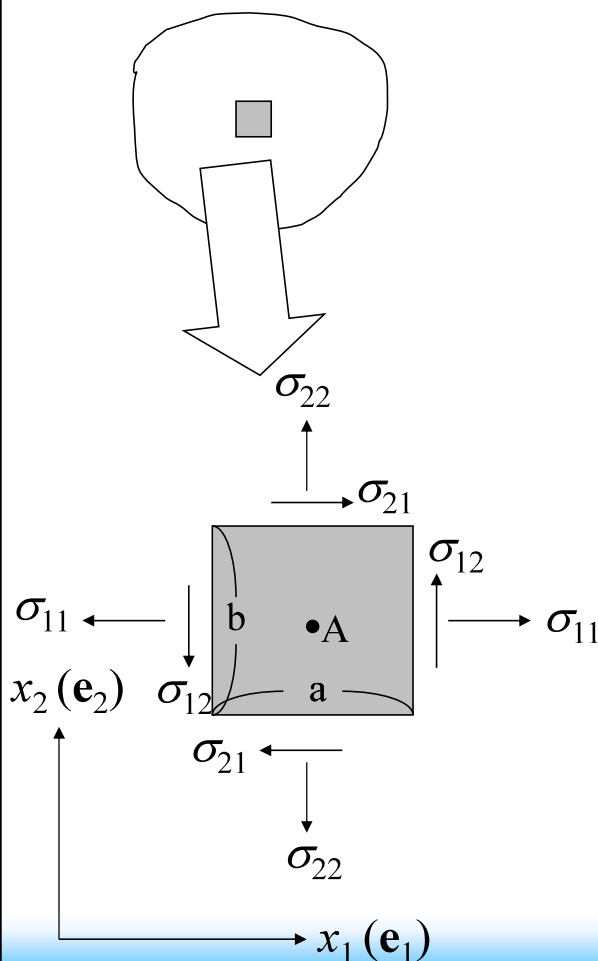
参考資料- テンソル(3)

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} &= \left(\sum_i a_i \mathbf{e}_i \otimes \sum_j b_j \mathbf{e}_j \right) \sum_k c_k \mathbf{e}_k \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k a_i b_j c_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k a_i b_j c_k \mathbf{e}_i \delta_{jk} \\
 &= \sum_i a_i \mathbf{e}_i \sum_j \sum_k (b_j c_k \delta_{jk}) \\
 &= \sum_j b_j c_j \sum_i a_i \mathbf{e}_i \\
 &= b_j c_j a_i \mathbf{e}_i \\
 &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) &= \sum_i a_i \mathbf{e}_i \otimes \sum_j b_j \mathbf{e}_j = \sum_i \sum_j a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (b_1 \ b_2) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

29

参考資料- 応力テンソル(1)



均一な応力場にある要素(あるいは応力の場所的違いが無視できる大きさの要素)を考え、要素の各面に働く単位面積あたりの垂直力およびせん断力を左図のように定義する。ここに、 x_i を法線とする面と $-x_i$ を法線とする面に作用する力は作用反作用の法則より向きが逆で大きさが等しくなる。これを行列表示して、

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \text{あるいは } \sigma_{ij}$$

A点まわりモーメントのつり合いより

$$(\sigma_{12} \cdot b) \cdot \frac{a}{2} \cdot 2 = (\sigma_{21} \cdot a) \cdot \frac{b}{2} \cdot 2 \quad \text{より}$$

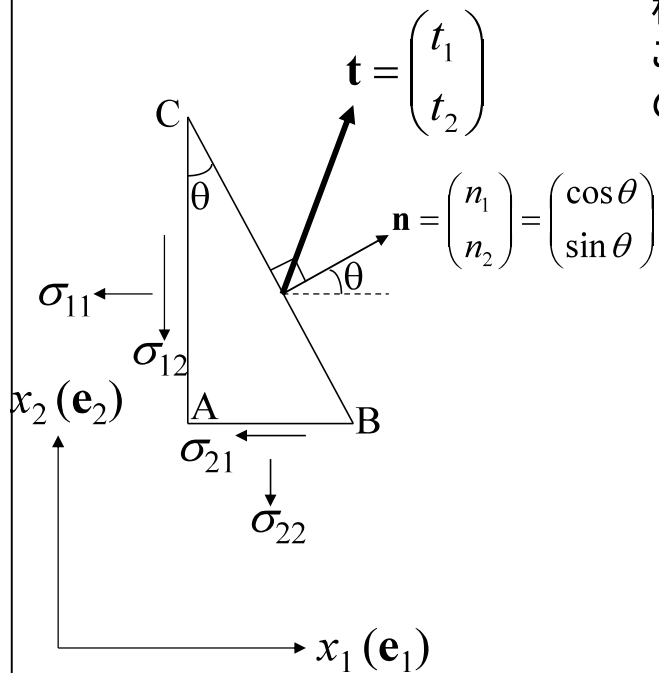
$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

したがって、 $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$

30

参考資料- 応力テンソル(2)

均一な応力場にある三角形要素の面の法線方向の単位ベクトルを \mathbf{n} とし、その面の単位面積に作用する力(応力ベクトル)を \mathbf{t} とする。ここに、 $BC:AC:AB=1:\cos\theta:\sin\theta=1:n_1:n_2$ より次のつり合い式が成り立つ



$$t_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2, \quad t_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2$$

すなわち

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad \text{あるいは} \quad t_i = (\sum_j) \sigma_{ji} n_j$$

また、 $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$ より

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \text{あるいは} \quad t_i = (\sum_j) \sigma_{ij} n_j$$

したがって、 $\boldsymbol{\sigma} (\sigma_{ij})$ はテンソル(対称テンソル)の性質を持っていることがわかる。