

e_{max} を考慮するための Subloading t_{ij} model の拡張

構成モデル 砂 最大間隙比

地域 地盤 環境 研究所・中部大学 中井 照夫
 JIP テクノサイエンス 高橋寛臣
 Islamic University of Technology Hossain Md. Shahin

これまでに、密度拘わらず3次元応力下の粘土から砂までの変形・破壊挙動を包括的に説明できる Subloading t_{ij} model¹⁾を名工大で開発し、その後も t_{ij} 地盤解析研究会を中心に実務への適用をはかってきた。その中で解析上、例えば地表面近くのように低拘束応力下でのせん断変形で過大な体積膨張が生じることが判っている。ここでは、低拘束応力下のせん断でも最大間隙比よりも間隙比が大きならないという制約を、このモデルの特徴を生かせば簡単に導入できることを示す。これは、特に砂質地盤の数値解析において考慮すべき問題と考えている。

1. Subloading t_{ij} model¹⁾の概要

Subloading t_{ij} model は以下の特徴を持っている。

- (1) 既往の応力パラメータ(p, q)ではなく、修正応力 t_{ij} に基づく応力パラメータ(t_N, t_S)で降伏関数 $f=0$ を作り、 t_{ij} 空間で流れ則を仮定する²⁾。その結果、中間主応力の影響を自動的に考慮できるとともに降伏関数が圧縮応力内で定義できる。
- (2) 下負荷荷概念³⁾を密度の状態変数 ρ とその発展則を与えることで導入した。その結果、同じ材料パラメータで拘束応力および間隙比の影響を考慮できる(更に ρ の発展則にボンディングを加えることで構造化した土の挙動も説明できるが、ここでは触れない)。
- (3) 塑性ひずみ増分を関連流動則成分(AF) と等方圧縮成分(IC)に分けているが、ひずみ硬化パラメータである塑性体積ひずみは関連流動則モデルのそれと同じである。その結果、単一の降伏関数・硬化パラメータで塑性流動方向の応力経路依存性を表現できる。
- (4) 降伏関数だけでなく弾性式も圧縮応力だけで定義でき、超弾性式と同じように応力と弾性ひずみ間に 1:1 の対応関係がある。この弾性式⁴⁾は弾性挙動をより妥当に説明できるだけでなく、如何なる弾性ひずみが生じても引張り応力が生じない

その他 $e \sim \log p$ 関係での正規圧密線(NCL)をひずみ速度に応じて平行にずらすことで、弾塑性モデルの延長で時間効果特性を説明できるが、これもここでは触れない。

Fig. 1 は (t_N, t_S) 空間で表した降伏曲面(破線: 初期、実線: 現在)と塑性ひずみ増分方向 (赤い矢印: ((AF)成分、青い矢印: (IC)成分)を表す。同図から降伏曲面は圧縮応力だけで定義でき、理論上如何なる塑性ひずみが生じても引張り応力は生じない。また、**Fig. 2** は初期(I点)および現在(P点)の間隙比を $e \sim \ln t_{N1}$ 関係上で示す(t_{N1} は **Fig. 1** に示すように降伏曲面の t_N 軸上の値で降伏曲面の大きさを表す)。同図の λ は圧縮指数で、 ρ は現在の間隙比 e と同じ応力状態の正規圧密線上の間隙比 e_N との差を表す。すなわち、 ρ は密度を表す状態変数と考える(ρ がゼロになれば正規圧密状態)。弾性成分が勾配 κ の $e \sim \ln t_N$ 関係を満たすとすると、**Fig. 2** の関係から次の降伏関数が得られる。

$$f = F - \left\{ H + \frac{\rho_0 - \rho}{\lambda - \kappa} \right\} = 0, \tag{1}$$

$$\text{where } F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), \quad H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p$$

ここに、 $X = t_S/t_N$ 、 $\zeta(X)$: $\zeta(0)=0$ を満たす単調増加関数。また、 t_{ij} 空間での関連流れ則より、塑性ひずみ増分は次式のような形で表せる。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \left\langle \frac{dF}{h^p} \right\rangle \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \quad \text{where } h^p: \text{ plastic modulus} \tag{2}$$

(1)式と適応条件($df=0$) から

$$df = dF - dH + \frac{d\rho}{\lambda - \kappa} = 0 \tag{3}$$

また、密度を表す内部変数 ρ は塑性ひずみの発達に伴い小さくなり、最終的にはゼロになると考えられるので、その発展則は次式のような形で与えられる。

$$d\rho = -(1 + e_0) \bar{G} \cdot \Lambda \tag{4}$$

where \bar{G} : monotonic increasing function of ρ and becomes 0 when $\rho=0$

(2), (3), (4)式より、 Λ は(5)式のように表され、その中の \bar{G} は具体的には(6)式で与えている。

$$\Lambda = \frac{dF}{h^p} = \frac{dF}{\frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \left(\frac{\partial F}{\partial t_{kk}} + \bar{G} \right)} \tag{5} \quad \bar{G} = \sqrt{3} \frac{a\rho}{t_N(1 + k_a X)} \tag{6}$$

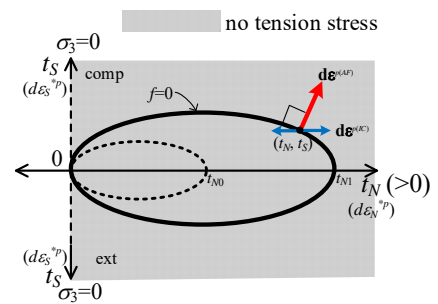


Fig. 1 降伏曲面と塑性ひずみ増分方向

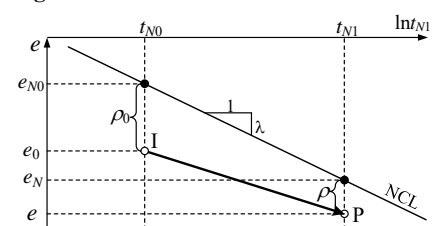


Fig. 2 $e \sim \ln t_{N1}$ 関係

2. モデルの拡張

Fig. 3 の3つの実線は上述の original のモデルによる砂の側圧一定三軸圧縮試験の計算曲線 ((a) $e \sim \log t_{N1}$ 関係および (b) $q/p \sim \varepsilon_r \sim \varepsilon_v$ 関係)を示す。材料パラメータは豊浦砂(Table 1)を想定している。低拘束応力から高拘束応力までの解析結果を示すが、何れの場合もせん断変形が進めば、最終的には間隙比が NCL のそれに到達する。その結果、同じ間隙比($e_0=0.65$)であっても拘束応力が大きくなるに従い、密な砂から緩い砂の挙動が変わることが判る。これは支持力問題や掘削問題の解析では拘束応力の変化を適切に評価することの大切さを教えている。限界状態線と下負荷面の考え方を使えば、このような挙動を説明できる。ただ、せん断に伴い最終的に限界状態線に到達するので、特に拘束応力が小さい場合、せん断ひずみの発生に伴い間隙比が $e_{max}(=1.0)$ を超え過大な体積膨張を生じることになる。一方、砂では拘束応力がいくら小さくても、最大間隙比もしくはそれに近い間隙比より緩くなるとは考えられない。ここでは、original のモデルに少し手を加えることで、このような低拘束応力下での e_{max} を考慮したモデルに拡張する。つまり、(6)式の $d\rho$ の発展則を規定する ρ だけを、Fig. 4 に示すように ρ^* に置き換える。すなわち、現在の応力状態に対応する NCL 上の間隙比を e_N としたとき、 $e_N < e_{max}$ では $\rho^* = \rho$ であるが、 $e_N > e_{max}$ では e_N ではなく e_{max} との差で ρ^* を定義する。その結果、 e_N と e_{max} の差 C_ρ を使って ρ^* は次式のように表現できる。

$$\rho^* = \langle \rho - C_\rho \rangle \quad \text{where } C_\rho = \langle e_N - e_{max} \rangle \quad (7)$$

ここに、 $\langle \rangle$ は非負を表し、 e_N は NCL の勾配 λ を使って次式で与えられる。

$$e_N = N - \lambda \ln(t_{N1}/P_a) \quad (8)$$

where P_a : atmospheric pressure, N : void ratio of NCL at $t_{N1} = P_a$

また、 t_{N1} は(1)式より次式で表せる。

$$t_{N1} = t_N \exp\{\zeta(X)\} \quad (9)$$

Fig. 3 の太い破線は ρ^* を導入したときの解析結果であるが、低拘束応力下での過大な体積膨張を防ぎ、間隙比は e_{max} に収束することが判る。また、Fig. 5 は低拘束応力 ($p=0.1\text{kPa}$) から等方圧縮した後に側圧一定 ($\sigma_3=196\text{kPa}$) でせん断した場合と、高拘束応力 ($p=196\text{kPa}$) から等方除荷した後に側圧一定 ($\sigma_3=0.1\text{kPa}$) でせん断時の解析結果を示すが、ここでも e_{max} を適切な考慮できていることが判る。

なお、通常下負荷面の定式化では2つの降伏曲面の大きさの違いで密度の影響が表現されるが、地盤材料において意味が明確な内部変数(間隙比)を用いて下負荷面を導入しているので、容易に e_{max} の影響を考慮できる。なお、Fig. 6 に示すように、材料パラメータ(試しに粘土のパラメータを採用)によっては、 e_{max} を少し超えることがあるが、 e_{max} を考慮しない場合(細い実線)に比べ体積膨張量ははるかに抑制される。

文献

- 1) Nakai *et al.*, (2011): A simple and unified three-dimensional model to describe various characteristics of soils, *Soils and Foundations*, **51**(6), 1149-1168. or Nakai (2012): *Constitutive Modeling of Geomaterials: Principles and Applications*, CRC Press,
- 2) Nakai · Mihara(1984): A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, *Soils and Foundations*, **24**(2), 82-94.
- 3) Hashiguchi (1980): Constitutive equation of elastoplastic materials with elasto-plastic transition, *Jour. of Appli. Mech., ASME*, **102**(2) 266-272.
- 4) 中井 · Shahin · 石川 (2018): 引張り応力の発生しない地盤材料の弾性式, 第53回地盤工学研究発表会, 369-370. or Nakai · Shahin · Ishikawa (2019): Rational modeling of elastic behavior in 3D condition, *Proc. of IS-Glasgow*, Glasgow, 15003

Table 1 豊浦砂の材料パラメータ

λ	0.05	Same parameters as Cam clay model
κ	0.004	
e_{NC} at $p=98\text{ kPa}$ & $q=0\text{ kPa}$	1.0	
$R_{cs} = (\sigma'_v/\sigma'_v)_{cs(comp)}$	3.2	
v_e	0.2	Shape of yield surface (same as original Cam clay at $\beta=1$)
β	1.6	
a	60	Influence of density and confining pressure
k_a	16	

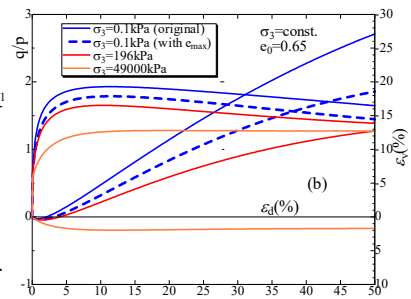
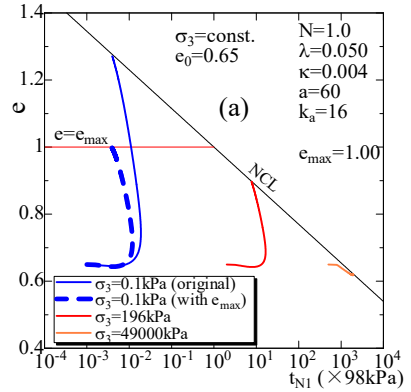


Fig. 3 original および拡張したモデルによる解析結果

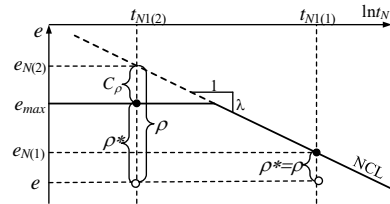


Fig. 4 ρ^* の定義

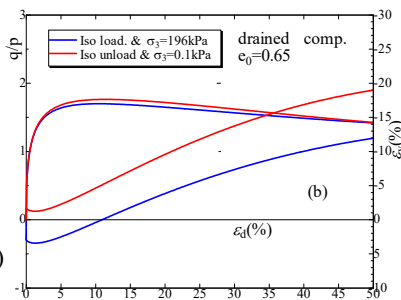
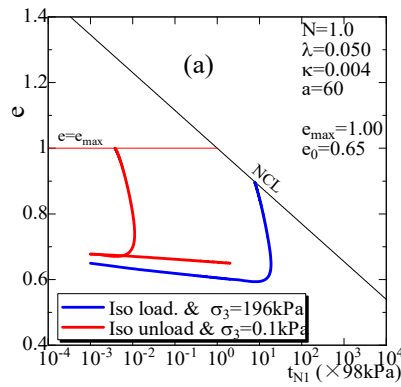


Fig. 5 等方圧縮とせん断を組み合わせた経路下での解析結果

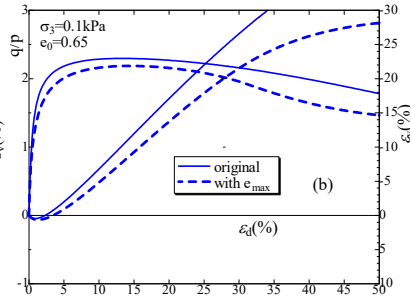
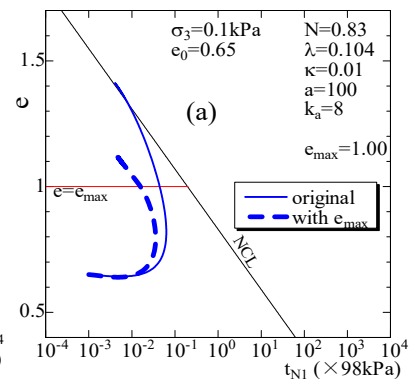


Fig. 6 粘土の材料パラメータを使った解析結果