

Subloading t_{ij} model の陰解法計算アルゴリズム (その 3) - 時間効果特性を含む定式化 -

構成モデル 陰解法 時間効果特性

地域 地盤 環境 研究所・中部大学 中井 照夫

Islamic University of Technology

Hossain Md. Shahin

JIP テクノサイエンス

高橋寛臣

中間主応力の影響はもとより、正規圧密土から過圧密土、自然堆積土までの変形・強度特性を唯一的に記述できる弾塑性モデル(Subloading t_{ij} model)を開発するとともに、その陰解法アルゴリズムを示してきた¹⁾²⁾。ここでは、既往の弾・粘塑性理論を採用しなくても、陰解法ならではの特徴を生かし、弾塑性モデルの延長で時間効果特性も考慮できるモデルの定式化について解説する。なお、時間効果特性に関するパラメータは周知の 2 次圧密係数だけである。

1. Subloading t_{ij} model³⁾の概要とリターンマッピング式

(1) 既往の応力パラメータ(p, q)ではなく、修正応力 t_{ij} に基づく応力パラメータ(t_N, t_s)で降伏関数 $f=0$ を作り、その空間で流れ則を仮定する(中間主応力の影響が自動的に考慮できるとともに降伏関数が圧縮応力内で定義できる)⁴⁾。(2) 密度の状態変数 ρ だけでなくボンディングの状態変数 ω を用いて下負荷面の概念⁵⁾を拡張する(正規圧密土、過圧密土、自然堆積土の挙動を共通の材料パラメータで説明できる)。(3) 塑性ひずみ増分を関連流動則成分(AF) と等方圧縮成分(IC)に分けているが、ひずみ硬化パラメータである塑性体積ひずみは関連流動則モデルのそれと同じである(単一の降伏関数・硬化パラメータで塑性流動方向の応力経路依存性を表現できる)⁶⁾。(4) 降伏関数だけでなく弾塑性も圧縮応力だけで定義でき、超弾塑性と同じように応力と弾性ひずみ間に 1:1 の対応関係がある(如何なるひずみが生じても引張り応力が生じない)⁷⁾。(5) $e \sim \log p$ 関係での正規圧密線(NCL)がひずみ速度に応じて平行にずれる(弾塑性モデルの延長で時間効果特性が説明できる)。これらの特徴を考慮した Subloading t_{ij} model の基本式は増分形で次式のように表せる。

$$\bullet d\varepsilon_{ij}^p = d\gamma \cdot \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \left(\frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) \quad (1) \quad \text{where}$$

$$\bullet d\varepsilon_v^p = d\gamma \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \quad (2)$$

$$\bullet d\rho = -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} d\gamma \quad (3)$$

$$\bullet d\omega = -(1+e_0)\sqrt{3}Q \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| d\gamma = -(1+e_0)\sqrt{3}a\omega \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| d\gamma \quad (4)$$

$$\bullet d\psi = -\lambda_\alpha \frac{1}{(-\dot{e})_{(equ)}^p} d(-\dot{e})_{(equ)}^p \quad (5)$$

$$\bullet f = F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} \{(\rho_0 - \rho) + (\psi_0 - \psi)\} = 0 \quad (6)$$

$$F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), \quad \zeta(X) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{X}{M^*} \right)^\beta \quad (7)$$

(where $X = t_s/t_N$)

$$H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p \quad (8)$$

$$L^{(IC)} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^2 \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ 1 + \left\langle \frac{G}{1+k_a X} + \frac{Q}{1+k_b X} \right\rangle \right\} \quad (9)$$

$$G = a\rho, \quad Q = b\omega \quad (10)$$

$$\psi = -\lambda_\alpha \ln(-\dot{e})_{(equ)}^p, \quad \left((-\dot{e})_{(equ)}^p = \sqrt{3}(1+e_0) \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| \right) \quad (11)$$

Fig. 1(a) に示すように、 t_s 軸は $\sigma_3=0$ 軸と一致するので降伏曲面上もその内側にも引張り応力域はない。 ψ は時間効果特性に関する内部変数(塑性ひずみ速度に応じて変化する NCL のシフト量)で、2 次圧密係数 λ_α (**Fig. 1(b)** の内挿図参照)を使って(11)式で表せる。その結果、その増分は(5)式で与えられる。また、(6)式は **Fig. 1(b)** の関係から誘導できる。

上式を Return mapping 式に変換する。現状態を n step, $\Delta \varepsilon$ のひずみ増分を与えたときの状態を $n+1$ step とする。以後、 n step および初期状態は下添字 $n, 0$ で、 $n+1$ step は下添字なしで表す。上添字の e, p および(trial) は弾性成分、塑性成分および弾性を仮定する試行状態を意味する。ここに、 $\Delta \varepsilon^p = \varepsilon^{e(trial)} - \varepsilon^e$ と表せるので、 $n+1$ step での陰的關係式として以下の式が得られる。なお、ボールド体の記号はベクトルあるいはテンソル成分を意味する。また、 \mathbf{N} および $\mathbf{N}^{(IC)}$ は $\partial F / \partial t_{ij}$ および δ_{ij} をベクトル表示したものである。

$$\bullet \mathbf{b}_1 = \varepsilon^e - \varepsilon^{e(trial)} + \Delta \gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \left(\frac{\mathbf{N}}{\text{tr} \mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) = 0 \quad (\Leftarrow \text{Eq. (1)}) \quad (12)$$

$$\bullet \mathbf{b}_2 = \rho - \rho_n - \Delta \gamma \left\{ -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{a\rho/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\} + \psi - \psi_n - \Delta \psi = 0 \quad (\Leftarrow \text{Eqs. (3), (5) and (11)}) \quad (13)$$

$$\bullet \mathbf{b}_3 = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \{ \varepsilon_{v,n}^p + \Delta \gamma \text{tr} \mathbf{N} \} - \frac{1}{\lambda - \kappa} \{ (\rho_0 - \rho) + (\psi_0 - \psi) \} = 0 \quad (\Leftarrow \text{Eqs. (2) and (6)}) \quad (14)$$

ボンディング効果を表す ω については、(4)式が ω と γ に関する微分方程式なので、積分することにより、(3)式の ω は直接的に計算される。そして、(10)式より Q は次式で与えられる。

$$Q = a \cdot \omega = a \cdot \omega_n \exp \left(-b(1+e_0)\sqrt{3} \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Delta \gamma \right) \quad (15)$$

時間効果特性に関する $\Delta \psi$ は(5)式から次式のように表せる。

$$\Delta \psi = -\lambda_\alpha \frac{1}{\left((-\dot{e})_{(equ),n}^p + (-\dot{e})_{(equ)}^p \right) / 2} \left\{ (-\dot{e})_{(equ)}^p - (-\dot{e})_{(equ),n}^p \right\} = -\lambda_\alpha \frac{2(R-1)}{1+R} \quad \text{where } R = \frac{(-\dot{e})_{(equ)}^p}{(-\dot{e})_{(equ),n}^p} = \frac{\sqrt{3}(1+e_0) \|\mathbf{N}\| \Delta \gamma}{(-\dot{e})_{(equ),n}^p \Delta t} \quad (16)$$

従って、(12)~(14)式は $\varepsilon^e, \Delta \gamma, \rho$ を未知数とする非線形連立方程式とみなすことができる。すなわち、

Implicit calculation algorithm of Subloading t_{ij} model (part 3): T. Nakai(GRI), H.M. Shahin(BUT) & H. Takahashi(JTS)

$\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T$, $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T = (\boldsymbol{\varepsilon}^e \ \Delta\gamma \ \rho)^T$ としたとき、 $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ を Newton 法で解くことになる。

また、試行弾性状態を含め弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ から応力を求めるには、弾性ひずみと応力が一意的に決まる弾性式が必要であるが、引張り応力が発生せず地盤材料の非線形弾性挙動を説明できる弾性モデル $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$ を使って計算できる。弾性モデルの詳細は文献7)を参照のこと。なお、時間効果特性を考慮するため追加すべき項を青い破線で囲んでいる。

2. 解析例

ひずみ速度をせん断中に変化させた非排水三軸試験の解析結果を示す。地盤材料として、正規圧密土($\rho_0=0.0, Q_0=0.0$)、自然堆積土($\rho_0=0.1, Q_0=10$)の藤森粘土を想定した。材料パラメータを Table 1 に、Figs. 2, 3 に解析結果を示す。(a) 図は偏差応力 $q \sim$ 偏差ひずみ ε_d 関係を、(b) 図は偏差応力 $q \sim$ 平均主応力 p 関係で表した有効応力経路である。各 step で与える軸ひずみ増分を $\Delta\varepsilon_a=0.1\%$ (実線)と 0.5% (プロット)の2ケースで解析した。また、黒の実線は時間効果を考慮しない結果である。ひずみ速度をせん断中変えた解析を行っているが、ひずみ速度に応じて応力・ひずみ関係がシフトする isotach や巻き戻し形状となる自然堆積土の有効応力経路を含めひずみ速度効果をよく表現している。

Table 1 材料パラメータ

λ	0.104	Same parameters as Cam clay model
κ	0.010	
e_{NC} at $p=98$ kPa & $q=0$ kPa	0.83	
$R_{cs} = (\sigma_1/\sigma_3)_{cs(comp)}$	3.5	
v_e	0.2	
β	1.5	Shape of yield surface
a	100	Influence of density and confining pressure
k_a	8	
b	10	Influence of bonding
k_b	3	
λ_α	0.003	Time effect

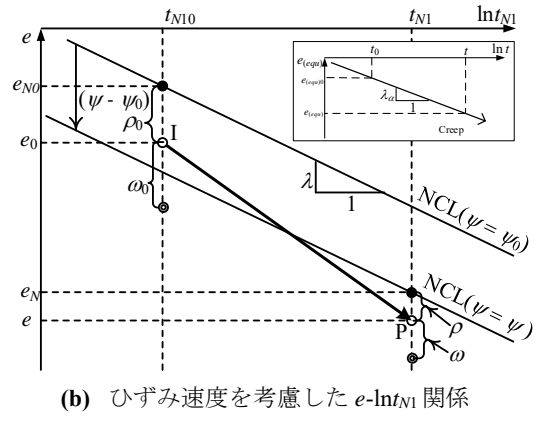
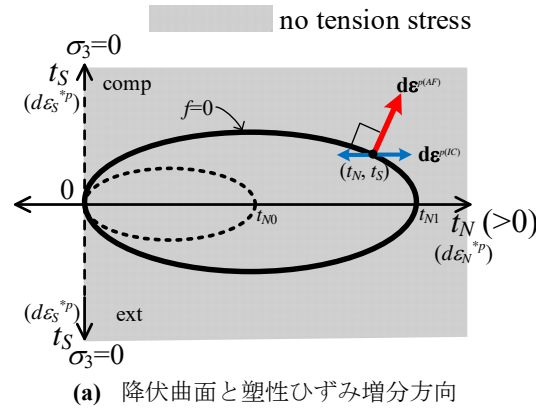


Fig. 1 Subloading t_{ij} model の説明図

文献

- 1) 中井・Shahin (2019): Subloading t_{ij} model の陰解法計算アルゴリズム, 第 54 回地盤工学研究発表会, 269-270
- 2) 中井・Shahin・高橋・戸田 (2020): Subloading t_{ij} model の陰解法計算アルゴリズム(その 2), 第 77 回土木学会年次講演会, III-133
- 3) Nakai *et al.*, (2011): A simple and unified three-dimensional model to describe various characteristics of soils, *Soils and Foundations*, 51(6), 1149-1168. or Nakai (2012): *Constitutive Modeling of Geomaterials: Principles and Applications*, CRC Press,
- 4) Nakai・Mihara(1984): A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, *Soils and Foundations*, 24(2), 82-94.
- 5) Hashiguchi (1980): Constitutive equation of elastoplastic materials with elasto-plastic transition, *Jour. of Appli. Mech.*, ASME, 102(2), 266-272.
- 6) 中井・Shahin (2017): 2重硬化(Double Hardening)則を用いない塑性流動方向の応力経路依存性の表現, 第 52 回地盤工学研究発表会, 307-308. もしくは Nakai・Shahin (2019): A simple method to describe stress path dependency of plastic flow, *Proc. of 16th ARCSMGE*, Taipei, SF01M-010006
- 7) 中井・Shahin・石川 (2018): 引張り応力の発生しない地盤材料の弾性式, 第 53 回地盤工学研究発表会, 369-370. or Nakai・Shahin・Ishikawa (2019): Rational modeling of elastic behavior in 3D condition, *Proc. of IS-Glasgow*, Glasgow, 15003

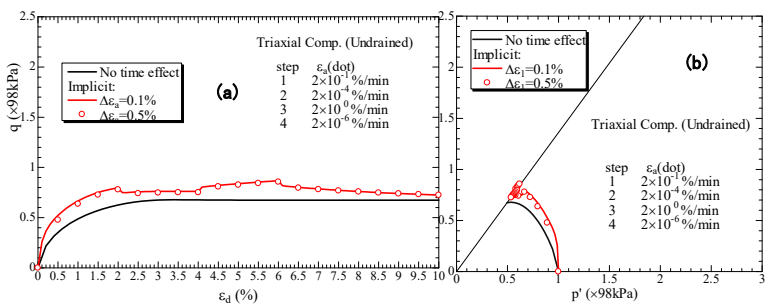


Fig. 2 正規圧密粘土の非排水三軸試験の解析

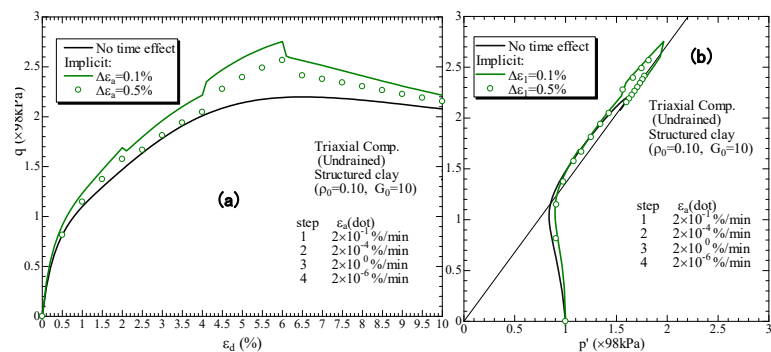


Fig. 3 ボンディングを有する粘土の非排水三軸試験の解析