

# 巨視的及び微視的観点から見た $t_{ij}$ の概念の意義

Significance of  $t_{ij}$  Concept from Macroscopic and Microscopic View Points

中 井 照 夫 (なかい てるお)

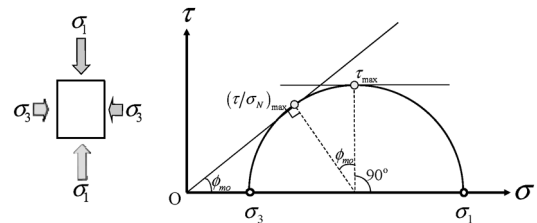
(株)地域地盤環境研究所・中部大学

## 1. はじめに

巨視的な観点からの地盤の挙動解析(連続体解析)と  
 言えばカムクレイ・モデル<sup>1),2)</sup>等の弾塑性モデルによる  
 有限要素解析, 微視的な観点からの解析(粒状体解析)  
 と言えば, 個別要素法(DEM)等による解析を意味す  
 ることが多い。しかし, 連続体解析では, いくら数値解  
 析法の精度や効率を上げて, 使う構成モデルが要素と  
 して説明できる挙動以上のものは得られない。一方, 粒  
 状体解析では典型的な現象の再現ができて, 実際地盤  
 の挙動予測にそのまま使えるとは到底考えられない。著  
 者の意見では, 粒状体解析はあくまで実験や理論を補佐  
 するあるいは代用する道具立ての一つである。近年, 粒  
 状体解析と言えば DEM を想像するが, 例えば小田<sup>3)</sup>ら  
 による土の微視的観察から得られた粒子接点角分布に関  
 する研究こそ先駆的な粒状体研究であると言えよう。

ところで, 巨視的解析では, 多くの場合 ( $p, q$ ) を応  
 力パラメータとする構成モデルが使われ, その適用性は  
 多くの場合三軸圧縮条件下だけで検証される。これは,  
 平均応力  $p$  及び偏差応力  $q$  をベースとする金属塑性論か  
 らの発展として地盤材料のモデルが開発されてきたこと  
 による。その後現在まで, ( $p, q$ ) を応力パラメータと  
 したモデルでは三軸圧縮条件下以外では同じ材料パラ  
 メータで説明できないことが分かっている(気にしてい  
 ないのかもしれないが), 地盤の解析に使われている。  
 平面ひずみ条件の盛土解析のような場合は, 三軸圧縮条  
 件下の材料パラメータで近似的に対応できて, 三次元  
 解析が必要とされる地盤の変形・破壊予測では, 一般  
 的な三次元応力下の要素レベルの応力~ひずみ関係を唯  
 一的に表せる構成モデルの Frame work がまず基本となる。

三次元応力下の地盤材料の力学挙動を唯一的に表すた  
 め, 空間活動面(SMP)<sup>4)</sup>に始まり, それを発展させた  
 拡張した空間活動面(SMP\*)<sup>5)</sup>, 更にこの SMP\* の考え  
 方を一般化した  $t_{ij}$  の概念<sup>6)</sup>へと発展させてきた。30年以  
 上も前の話である。本稿ではこの概念が実験結果に合わ  
 せるための既往の応力パラメータ ( $p, q$ ) の修正ではな  
 く, 地盤材料が摩擦則(せん断応力でなく応力比)に従  
 う材料であり, かつ応力比の変化とともに異方が発達  
 する粒状体の性質を連続体に反映させたものであること  
 を説明する。以前の「講座<sup>7)</sup>でも  $t_{ij}$  の考え方に触れた  
 が, ここではその意義に絞って解説する。



図一 二次元応力状態での Mohr の応力円と応力パラメータ

## 2. 二次元状態での応力パラメータ

図一に示すように, 主応力 ( $\sigma_1, \sigma_3$ ) が作用する二  
 次元応力状態を考える。二次元モデルでは,  $\tau_{max}$  面  
 (45°面) 上の平均応力  $s$  とせん断応力  $t$  を使って定式化  
 をすることが多い。この時, せん断・垂直応力比は

$$\frac{\tau_{45^\circ}}{\sigma_{45^\circ}} = \frac{t}{s} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \sin \phi_{m0} \dots \dots \dots (1)$$

一方, 村山<sup>8)</sup>は半世紀以上前に土は摩擦則に従う材料  
 だから45°面ではなく,  $(\tau/\sigma)_{max}$  となる mobilized 面  
 (最大稼働面とも呼ばれた) に着目すべきだと主張した。  
 ここでのせん断・垂直応力比は

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_1 \sigma_3}} = \tan \phi_{m0} \dots \dots \dots (2)$$

式(1)であろうが, 式(2)であろうが2つの応力パラ  
 メータで表現するので, どちらでもよいとも考えられる  
 が, 式(1)では応力比が1を超えると引張り領域になる  
 のに対し, 式(2)では無限大になっても引張り応力は発  
 生しない。どちらが扱い易いかは明白であろう。

## 3. 三次元状態における弾塑性モデル

### 3.1 正八面体面と空間活動面

三次元の構成モデルでは, 等方性を仮定すると3主  
 応力若しくは3つの応力パラメータ(不変量)で降伏  
 関数(塑性ポテンシャル)を記述できる。しかし, 3つ  
 の変数を用いる関数は決めにくいので, 実験事実を参考  
 に, 2つの応力パラメータで定式化する。図二に示す  
 ように, 3主応力 ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) が作用する時, 各2主  
 応力間でせん断力が最大になる面が3つ定義できるし,  
 各2主応力間でせん断・垂直応力比が最大になる面も3  
 つ定義できる。三次元空間においてせん断応力が最大に  
 なる3つの面を共有する面が正八面体面(Octahedral  
 plane)であり, せん断・垂直応力比が最大になる3つ

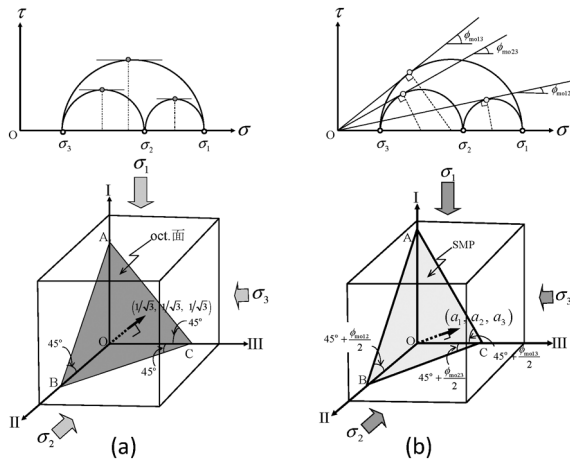


図-2 (a) 正八面体面 (oct. 面) と (b) 空間活動面 (SMP)

の面を共有する面が空間活動面 (SMP)<sup>4)</sup>となる。

### 3.2 (p, q) を用いるモデルの特徴と問題点

図-3 は主応力空間に主応力ベクトル (OP) と正八面体面 (ABC) を描いている。正八面体面の法線方向余弦は  $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  となるので、OP はこの面に垂直な成分 (ON) と平行な成分 (NP) に分けられる。カムクレイ・モデル<sup>1),2)</sup>を始めとする多くの弾塑性モデルの降伏関数  $f=0$  は、これらの成分に対応する2つの応力パラメータ ( $p, q$ ) を使って定式化される。

$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{1}{3}} ON = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{oct} \\ q = \sqrt{\frac{3}{2}} NP = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} t_{oct} \end{cases} \quad (3)$$

そして、応力  $\sigma_{ij}$  空間で直交則が成り立つとして、次式で塑性ひずみ増分の方向が計算される。

$$d\epsilon_{ij}^p = A \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = A \left( \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (\text{ここに, } \eta = q/p) \quad (4)$$

図-4 は ( $p, q$ ) 空間にカムクレイ型の降伏曲面 ( $f=0$ ) と直交則を模式的に描いている。上半分が三軸圧縮条件、下半分が三軸伸張条件を表す。応力と塑性ひずみ増分の共軸性から  $p$  軸方向には塑性体積ひずみ増分  $d\epsilon_p^p$  が、 $q$  軸方向には塑性偏差ひずみ増分  $d\epsilon_q^p$  が対応する。

図-5 のプロットは正規圧密粘土の三軸圧縮及び伸張試験結果 ( $p = \text{const.}$ ) の応力・ひずみ関係を、カムクレイ型の応力及びひずみ増分パラメータで整理したものである。また、図-6 は応力比-ひずみ増分関係の整理を示すが、圧縮側と伸張側で異なる関係となる (これは図-4 の降伏曲面の形状が圧縮側と伸張側で異なることを意味する)。しかし、( $p, q$ ) を用いたモデル化ではこれらの関係が中間主応力の大きさに拘わらず成り立つことを前提とする。図-7 は同じ試料の3主応力制御試験 ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) から得られる正八面体面上のひずみ増分方向の実測値を正八面体面上の応力経路に重ねて描いている。 $\theta=0^\circ$  及び  $\theta=60^\circ$  はそれぞれ三軸圧縮及び三軸伸張試験の応力経路を意味する。相異なる3主応力

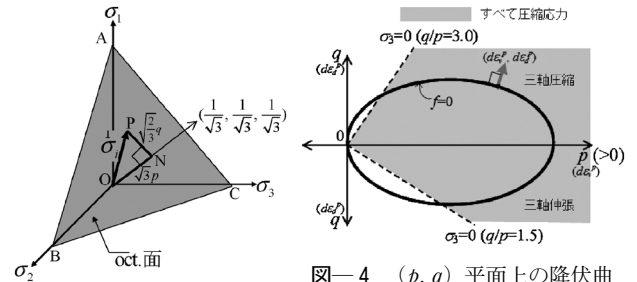


図-3 カムクレイ型モデルの応力パラメータ

図-4 ( $p, q$ ) 平面上的の降伏曲面と応力の取り得る領域

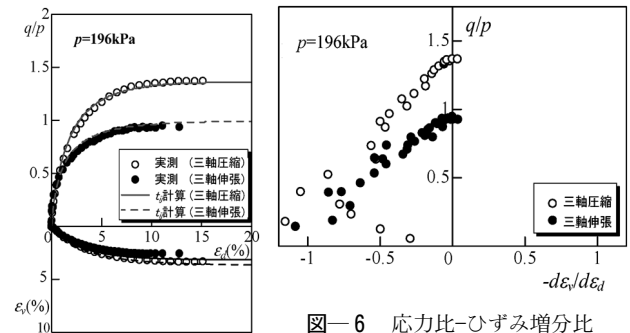


図-5 応力・ひずみ関係

図-6 応力比-ひずみ増分比関係

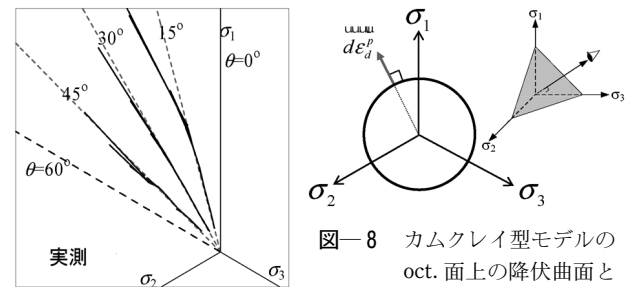


図-7 oct. 面上のひずみ増分方向の実測値

図-8 カムクレイ型モデルの oct. 面上の降伏曲面とひずみ増分方向

下の試験 ( $\theta=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ) ではひずみ増分方向は応力比が大きくなるに従い、半径方向 (応力経路の方向) から傾向を持って左側にずれる。同図において、中間主ひずみ  $d\epsilon_2$  は  $\theta=0^\circ$  方向では最少主ひずみ増分  $d\epsilon_3$  に等しくなり、 $\theta=60^\circ$  方向では最大主ひずみ増分  $d\epsilon_1$  に等しくなる。すなわち、正八面体面上のひずみ増分方向の僅かなブレは主ひずみ増分の評価に大きく影響する。( $p, q$ ) を用いたモデルでは図-8 から分かるように正八面体面上の降伏曲面の形状は必然的に円であり、それから計算されるひずみ増分方向は常に半径方向となる。

以上のように、カムクレイ型の応力パラメータを用いた定式化では、中間主応力の影響が適切に考慮できない上に、前節の二次元の  $45^\circ$  面と同じ問題点も必然的に持つ。図-4 の圧縮側の  $q/p=3$  の直線と伸張側の  $q/p=1.5$  の直線はそれぞれ最小主応力  $\sigma_3=0$  の状態を表し、これらの直線より左側では引張り応力が作用する領域 (白塗りの領域) となる。すなわち、引張りに抵抗しない材料では、同図のグレーの領域でしか応力を定義できない。しかし、カムクレイ・モデルやその後の異方性等を考慮しカムクレイ型の派生モデルでも、降伏曲面は原

点で  $q$  軸に接する形状となる。また、中間主応力を考慮するため便宜的にパラメータを中間主応力の大きさに降伏曲面の形を変えることもあるが、 $(p, q)$  でモデル化する限り、この問題点は変わらない。更に言えば、 $(p, q)$  を使った bounding surface モデルや subloading surface モデルにおいても引張り領域に入る可能性は同じである。これは地盤の変形解析に適用したとき、弾性変形をしている間や塑性変形していても  $q/p$  が大きくなった時に引張り領域 (図-4 の白塗りの部分) に応力状態が入る可能性があることを意味する。したがって、構成モデルは、中間主応力の影響はもとよりどのような変形をしても引張り領域に入らない定式化が必要で、応力パラメータ等に制限を設けるようなモデル化は実際問題への適用で問題が生じると言わざるを得ない。

3.3  $t_{ij}$  の概念に基づく定式化とその意義

$t_{ij}$  の概念に基づく弾塑性論の式の展開はこれまでに文献<sup>9)~11)</sup>等述べているので、ここではなぜこの概念が有効であるのかという点について解説する。

さて、図-2 の SMP の法線方向余弦は応力比の関数となり、応力の二次及び三次の不変量を  $I_2, I_3$  とした時、次式で与えられる

$$(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{I_3/(I_2\sigma_1)}, \sqrt{I_3/(I_2\sigma_2)}, \sqrt{I_3/(I_2\sigma_3)}) \dots\dots (5)$$

したがって、SMP 上の垂直及びせん断応力は次式のように表せる。

$$\begin{cases} \sigma_{SMP} = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 = 3I_3/I_2 \\ \tau_{SMP} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 a_1^2 a_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_2^2 a_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 a_3^2 a_1^2} \end{cases} \dots\dots (6)$$

ここに、せん断・垂直応力比  $\tau_{SMP}/\sigma_{SMP} = \text{const.}$  とするとモール・クーロンの破壊基準に外接する松岡・中井基準<sup>4)</sup>となり、内外で多く引用されている。なお、この基準を使って既往の  $(p, q)$  を用いたモデルの降伏曲面をひずませ、中間主応力を考慮したモデル化も度々行われているが、本質的なやり方ではない。さて、式(5)の  $(a_1, a_2, a_3)$  を使って、次式で示す修正応力の主値を定義する。

$$t_1 = a_1 \sigma_1, \quad t_2 = a_2 \sigma_2, \quad t_3 = a_3 \sigma_3 \dots\dots (7)$$

また、修正応力テンソル  $t_{ij}$  は、 $(a_1, a_2, a_3)$  を主値とする対称テンソルを  $a_{ij}$  とすると、次式で表せる。

$$t_{ij} = a_{ik} \sigma_{kj} \dots\dots (8)$$

さて、式(7)、(8)の修正応力を使えば、式(6)は次式のように表せ、それは図-9 に示すように、修正応力の SMP に垂直な成分及び平行な成分として再定義できる。

$$\begin{cases} t_N = ON = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 = \sigma_{SMP} \\ t_S = NT = \sqrt{(t_1 a_2 - t_2 a_1)^2 + (t_2 a_3 - t_3 a_2)^2 + (t_3 a_1 - t_1 a_3)^2} = \tau_{SMP} \end{cases} \dots\dots (9)$$

そして、降伏関数  $f=0$  を  $(t_N, t_S)$  の関数で表し、 $\sigma_{ij}$  空間でなく、修正応力  $t_{ij}$  空間で直交則が成り立つとして、次式で塑性ひずみ増分が計算される。

$$d\varepsilon_{ij}^p = A \frac{\partial f}{\partial t_{ij}} = A \left( \frac{\partial f}{\partial t_N} \frac{\partial t_N}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial t_S} \frac{\partial t_S}{\partial X} \right) \quad (\text{ここに、} X = t_S/t_N) \dots\dots (10)$$

図-10 は  $(t_N, t_S)$  空間に図-4 と同様、上半分を三

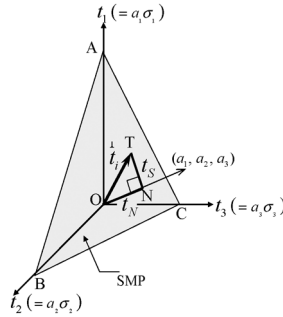


図-9  $t_{ij}$  モデルの応力パラメータ

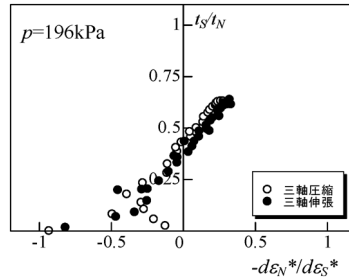


図-11 応力比-ひずみ増分比関係

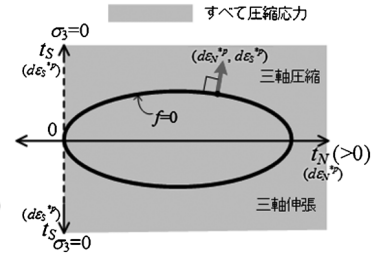


図-10  $(t_N, t_S)$  平面上の降伏曲面と応力の取り得る領域

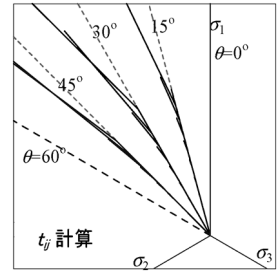


図-12 正八面体面上のひずみ増分方向の解析結果

軸圧縮条件、下半分を三軸伸張条件として降伏曲面を模式的に描いている。ここでも、応力と塑性ひずみ増分の共軸性が成り立つとすると、塑性ひずみ増分の SMP に垂直な成分及び平行な成分 ( $d\varepsilon_N^{*p}, d\varepsilon_S^{*p}$ ) が塑性ひずみ増分パラメータとなり、それぞれ  $t_N$  軸及び  $t_S$  軸方向に対応する。なお、なぜわざわざ修正応力を導入する必要があるのかという点に関しては後で説明する。

前出の図-5 の曲線は  $t_{ij}$  の概念を使った正規圧密粘土の応力~ひずみ~ダイレイタンシー関係の計算曲線を示すが、圧縮・伸張の差異を含め実測値を説明できる。図-11は図-6 と同じ実測値を  $t_{ij}$  の概念に基づく応力比~ひずみ増分比関係で整理したものであるが、圧縮・伸張に拘わらずユニークな関係になる。言い換えれば、図-10の  $(t_N, t_S)$  空間に描く降伏曲面 (塑性ポテンシャル) の形は中間主応力の影響を受けない。図-12は図-7 の実測値に対応するせん断ひずみ増分方向の計算結果であるが、実測される方向のズレを適切に表現できる。

更に、式(6)、(9)から分かるように、 $t_N = 3I_3/I_2$  となるので、図-10の  $t_N > 0$  の領域 (グレーの領域) ではすべての主応力は正となる ( $t_S$  軸上で  $\sigma_3 = 0$  となる)。したがって、応力比  $t_S/t_N$  がいくら大きくなって引張り応力は発生せず、降伏曲面の内側にも引張り領域はない。

以上のように、 $t_{ij}$  の概念を使えば、中間主応力の影響を適切に考慮できるだけでなく、引張り応力の発生しないモデル化が自動的にできる。

4.  $t_{ij}$  の概念が持つ物理的な意味

ここでは粒状体力学と呼ばれている分野のこれまでの研究成果を参考に  $t_{ij}$  の概念の意味について考えよう。半世紀近く前、小田<sup>3)</sup>は砂のせん断試験の微視的な観察から、粒状体は応力比の増加に伴い接点の接平面の法線

方向が最大主応力方向に向く粒子が増えることを見だし、これがせん断により生じる粒状体の誘導異方性の源であることを示した。松岡<sup>12)</sup>もアルミ棒積層体の一面せん断試験の粒子接点角分布の観察から同様の結果を見いだしている。図-13は小田による砂の応力・ひずみ関係と粒子接平面の法線方向頻度分布を表すローズダイグラムである<sup>13)</sup>。また、佐武<sup>14)</sup>は光弾性棒集合体のせん断試験等を参考に、粒子接平面の法線方向分布を粒状体の構造テンソル  $\phi_{ij}$  と考え、小田らの実験結果から構造テンソルは応力比と関係づけられ、その主値 ( $\phi_1, \phi_2$ ) と主応力比 ( $\sigma_1/\sigma_2$ ) の間に近似的に次の関係が成り立つとした。

$$\phi_1/\phi_2 \approx (\sigma_1/\sigma_2)^{0.5} \dots\dots\dots (11)$$

また、佐武<sup>15)</sup>は次式の修正応力を提案している。

$$\sigma_{ij}^* = (1/3)\phi_{ik}^{-1}\sigma_{kj} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $a_{ij}$  が  $\phi_{ij}$  の逆テンソルになっており、式(8)から  $t_{ij}$  と  $\sigma_{ij}^*$  が対応する修正応力テンソルとなる。

図-14の(a)図はこの粒子接点の接平面法線方向分布が最大主応力方向に向くことを二次元で模式的に示している。これを連続体として考えれば、(b)図の様に  $\sigma_1$  方向に硬くなる異方性が発達することを意味する。この異方性材料の挙動は(c)図に示すように、等方性材料を仮定し、 $\sigma_1/\sigma_2$  よりも小さな応力比となる修正応力を作用させるのと等価である(式(5)から分かるように、 $a_1, a_2$  は  $\sigma_1$  及び  $\sigma_2$  の平方根に逆比例する)。すなわち、 $t_{ij}$  空間で流れ則を考えることは、異方性連続体を等価な等方性連続体に変換してその力学挙動を説明することを意味する。さて、同じように流れ則を考える透水問題でも、異方性地盤では等ポテンシャル面に流線は直交せず、地盤を等方的な空間に変換し、そこで直交則を考える。一方、多くの弾塑性モデルでは等方、異方を問わず通常の応力空間で直交則を仮定しているが、これが物理的な意味から正しい異方性の扱いなのかは?である。異方性が発達する場合、 $t_{ij}$  の概念のように等方的な空間に変換し

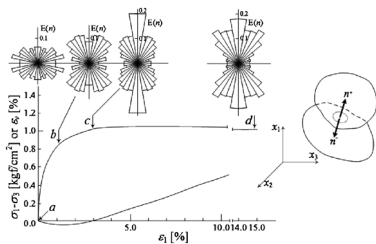


図-13 応力状態と粒子接平面の法線頻度分布 (小田<sup>13)</sup>)

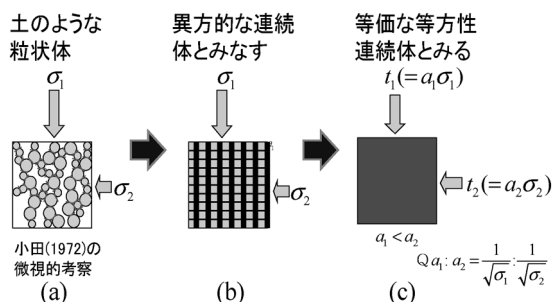


図-14  $t_{ij}$  の概念の説明図

てから直交則を適用するのが本筋と言えよう。

### 5. おわりに

地盤材料は粒状性材料である。したがって、粒状体として解析するのが本質であると考えられるかもしれないが、実務で使うためには連続体として応力～ひずみ関係(構成モデル)を記述する必要がある。したがって、地盤は連続体なのか?粒状体なのか?と言う二者択一の議論には抵抗を覚えるが、連続体力学だけではモデルの物理的意味が明確にならない。そこでは、粒状性材料としての見方が必要であり、それを通してモデルの物理的意味も明確になる。また、地盤材料の挙動を支配するのは摩擦則である。連続体としてのモデル化でも、どのような応力を使って定式化すべきかについて洞察が必要である。

### 参 考 文 献

- 1) Schofield, A. N. and Wroth, C. P.: Critical State Soil Mechanics, McGraw-Hill, London, 1968.
- 2) Roscoe, K. H. and Burland, J. B.: On the generalized stress-strain behavior of wet clay. Heyman and F. A. Leckie (eds.), Engineering Plasticity, Cambridge University Press, pp. 535-609, 1968.
- 3) Oda, M.: The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand, Soils and Foundations (S & F), Vol. 12, No. 2, pp. 1-18, 1972.
- 4) Matsuoka, H. and Nakai, T.: Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, Proc. of JSCE, No. 232, pp. 59-70, 1974.
- 5) 中井照夫・松岡 元: 3主応力下の土のせん断挙動に関する統一的理解, 土木学会論文報告集, 第303号, 1980.
- 6) Nakai, T. and Mihara, Y.: A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, S & F, Vol. 24, No. 2, pp. 82-94, 1984.
- 7) 中井照夫: 講座 地盤材料の構成モデル最前線, 7.3, 地盤工学会誌, Vol. 59, No. 9, pp. 66-75, 2011.
- 8) Murayama, S.: A theoretical consideration on a behavior of sand, Proc. IUTAM Symposium on Rheology and Soil Mechanics, Grenoble, 1964.
- 9) Nakai, T. and Hinokio, T.: A simple elastoplastic model for normally and over consolidated soils with unified material parameters, S & F, Vol. 44, No. 2, pp. 3-70, 2004.
- 10) Nakai T., Shahin H. M., Kikumoto M., Kyokawa H., Zhang F. and Farias, M. M.: A simple and unified three-dimensional model to describe various characteristics of soils, S & F, Vol. 51, No. 6, pp. 1149-1168, 2011.
- 11) Nakai, T.: Constitutive Modeling of Geomaterials: Principles and Applications, CRC Press, Boca Raton/London /New York, 2012.
- 12) Matsuoka, H.: A microscopic study on shear mechanism of granular materials, S & F, Vol. 14, No. 1, pp. 29-43, 1974.
- 13) Oda, M.: Inherent and induced anisotropy in plasticity theory of granular soils, Mechanics of Materials, Vol. 16, No. 1-2, pp. 35-45, 1993
- 14) 佐武正雄: 地盤と土の異方性, 土と基礎, Vol. 32, No. 11, 1984.
- 15) Satake, M.: Fabric tensor in granular materials, Proc. IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials, Delft, pp. 63-68, 1982.

(原稿受理 2018.3.27)